

Prüfer: Prof. G. Dogil
Betreuer: Dr. W. Wokurek

begonnen am: 1. Juni 1995
beendet am: 31. August 1995

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die Wigner-Projektion definiert und es wird gezeigt, daß die Wigner-Verteilung mit bekannten Algorithmen der Computertomographie aus der Wigner-Projektion berechnet werden kann.

Da die Wigner-Projektion über die Wigner-Verteilung definiert ist, zielt diese Arbeit auf die Berechnung der Wigner-Projektion direkt aus dem Zeitsignal, ohne Umweg über die Wigner-Verteilung ab. Dieses Ziel wird durch die Angabe eines geometrischen Verfahrens zur direkten Berechnung der Wigner-Projektion entlang von Geraden der Zeit-Frequenz-Ebene aus dem Zeitsignal erreicht.

Das Verfahren wird in der Programmiersprache MATLAB für zeit-diskrete Signale implementiert und Ergebnisse zur implementierten Wigner-Projektion werden vorgestellt.

Die Wigner-Projektion

Dipl. Math. Detlef Prescher
Studienarbeit

Institut für maschinelle Sprachverarbeitung
Universität Stuttgart
Azenbergstraße 12
D 70174 Stuttgart

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Der Fourier-Slice-Satz	6
3	Die Wigner-Projektion	10
3.1	Definition der Wigner-Projektion, Berechnungen für 0° und 90°	10
3.2	Berechnung der Wigner-Projektion mit <i>gedrehter Wigner-Verteilung</i>	11
3.3	Sind <i>gedrehte Wigner-Verteilungen</i> Wigner-Verteilungen ? . .	15
3.4	Standortwechsel: Die Wigner-Verteilung von manipulierten Zeit-Signalen	16
3.5	Manipulationen des Zeitsignals mit Chirp-Funktionen und deren Auswirkungen auf die Wigner-Verteilung	18
3.6	<i>Gedrehte Wigner-Verteilungen</i> sind Wigner-Verteilungen ! . .	23
3.7	Die Berechnung der Wigner-Projektion aus dem Zeitsignal . .	25
4	Bemerkungen	26
5	Eine Implementierung der Wigner-Projektion	28
5.1	Die Funktion <i>faltung</i>	28
5.2	Die Funktion <i>chirp</i>	31
5.3	Die Funktion <i>wp</i>	32
5.4	Ergebnisse zur implementierten Wigner-Projektion	33

1 Einleitung

Die Wigner-Verteilung ist eine Zeit-Frequenz-Darstellung eines Zeitsignals. Sie vereinigt für Sprachsignale die Vorteile des Breitband- und des Schmalband-Spektrogramms, d.h. sie verbindet eine gute Zeitaufösung mit einer guten Frequenzaufösung und bietet sich damit für die Analyse von Sprachsignalen an.

Die vorliegende Arbeit stellt eine neuartige Berechnungsmethode für die Wigner-Verteilung vor. Genauer gesagt, konzentriert sich diese Arbeit auf Definition und Berechnung der Wigner-Projektion. Von der Wigner-Projektion kann man jedoch mit Algorithmen, die für die Computertomographie entwickelt wurden, zur Wigner-Verteilung gelangen.

Nach dieser Einleitung wird deshalb zunächst ein wenig auf die Grundlagen der Computertomographie eingegangen, die vom mathematischen Standpunkt aus gesehen, relativ einfach sind, da sie sich nämlich in einem einzigen Satz niederschreiben lassen, dem sogenannten Fourier- Slice-Satz. Von dieser mathematischen Schlichtheit darf man sich jedoch nicht täuschen lassen. Der Fourier-Slice-Satz zeigt einen raffinierten und eleganten Weg auf, wie man sich von einem direkt nicht zugänglichen Objekt trotzdem ein Abbild beschaffen kann. Dieses Potential wird in dieser Arbeit genutzt, um einen neuartigen Zugang zur Wigner-Verteilung aufzuzeigen.

Nach dem Abschnitt zur Computertomographie finden sich die Definition und auch schon erste Berechnungen zur Wigner Projektion. Daran anschließend wird ein Weg aufgezeigt, wie man mit Hilfe des Fourier-Slice-Satzes von der Wigner-Projektion zur Wigner-Verteilung gelangen kann.

Im folgenden steht dann die Wigner-Projektion ganz im Mittelpunkt des Interesses. Die Wigner-Projektion ist über die Wigner-Verteilung und nicht direkt über das Zeitsignal definiert. Eigentlich ist aber ein Weg gesucht, vom Zeitsignal über die Wigner-Projektion die Wigner-Verteilung zu berechnen. In dieser Arbeit wird daher ein direkter Weg vom Zeitsignal zur Wigner-Projektion angegeben. Hierbei befreit man sich Schritt für Schritt durch gewisse geometrische Überlegungen von den Wigner-Verteilungen.

Für die Berechnung der Wigner-Projektion spielen Manipulationen des Zeitsignals mit Chirp-Funktionen eine wichtige Rolle, da diese die Wigner-Verteilung des Zeitsignals in relativ übersichtlicher Weise verändern. Es ist bekannt (oder es wurde zumindest antizipiert), daß gedrehte Wigner-Verteilungen durch Faltung und Multiplikation von Chirp-Funktionen mit dem Zeitsignal produziert werden können. Ein wesentliches Ergebnis dieser Arbeit ist die Bestätigung dieser Tatsache durch die genaue Angabe der zugrundeliegenden Chirp-Funktionen.

Im letzten Abschnitt werden erste Implementierungsversuche der Wigner-Projektion vorgestellt. Besondere Schwierigkeiten ergeben sich darin, daß

der theoretische Teil für zeitkontinuierliche Signale formuliert ist, die Implementierung aber zeitdiskret erfolgte. Die zeitdiskrete Implementierung ist daher nur in einem eingeschränkten Parameterbereich verwendbar.

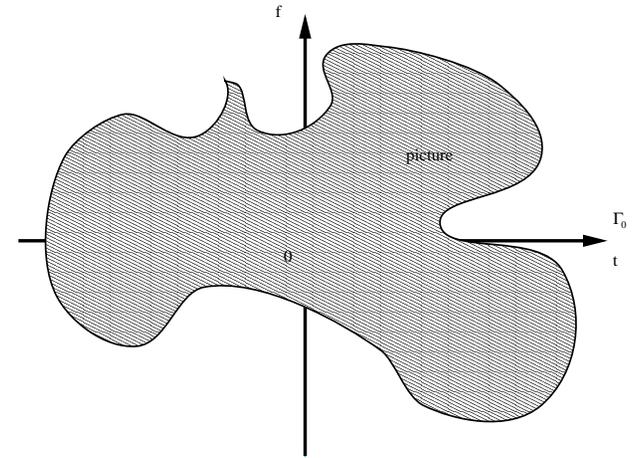


Abbildung 1: *picture* als Bild

2 Der Fourier-Slice-Satz

Um in dieser Arbeit eine konsistente Bezeichnungsweise zu erhalten, wird in diesem Abschnitt von einem kartesischen Koordinatensystem mit einer Zeitachse t und einer Frequenzachse f ausgegangen.

Sei in diesem Koordinatensystem eine reellwertige Funktion

$$picture : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (t, f) \mapsto picture(t, f) \quad (1)$$

gegeben.

Wie der Name der Funktion schon andeutet, kann man sich unter *picture* durchaus ein Bild vorstellen, zum Beispiel einen Schnitt durch einen menschlichen Kopf oder eben auch die Wignerverteilung eines Sprachsignals. Die Farbe (oder Intensität oder Schwärzung) des Bildes an der Stelle (t, f) bestimmt sich mittels einer gegebenen reellwertigen Farbskala aus dem Funktionswert $picture(t, f)$. Ein einfaches Bild ist in der Abbildung 1 dargestellt.

Nun ist es so, daß man nicht ohne weiteres durch einen menschlichen Kopf schneiden darf. Man darf allerdings in der Regel unter gewissen Voraussetzungen den menschlichen Kopf durchleuchten. Diese gegebene Sachlage motiviert folgende Annahmen:

Man stelle sich vor, daß das Bild *picture* nicht direkt zugänglich ist, dafür

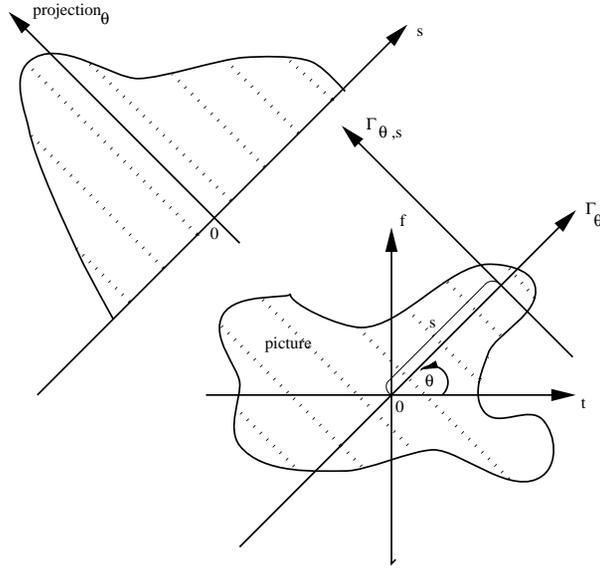


Abbildung 2: Berechnung von $projection_\vartheta$ aus $picture$

aber dessen sämtliche Projektionen entlang der Geraden $\Gamma_{\vartheta,s}$:

$$projection_\vartheta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad s \mapsto \int_{\Gamma_{\vartheta,s}} picture(t, f) d(t, f) \quad (2)$$

Hierbei ist ϑ ein orientierter Winkel und $\Gamma_{\vartheta,s}$ eine orientierte Gerade, wie in Abbildung 2 dargestellt. Ausdrücklich soll an dieser Stelle bemerkt werden, daß s auch negative Werte annehmen darf.

Der Schlüssel zur Bestimmung des Bildes aus dessen Projektionen ist der Fourier-Slice-Satz. Informell besagt es, daß die (2-dimensionale) Fourier-Transformierte von $picture$ entlang der Geraden Γ_ϑ mit der Fourier-Transformierten von $projection_\vartheta$ übereinstimmt. Die Gerade Γ_ϑ ist ebenfalls in Abbildung 2 dargestellt. Sämtliche Geraden Γ_ϑ überdecken aber zusammen die gesamte Ebene \mathbb{R}^2 . Somit ist die Fourier-Transformierte des Bildes vollständig bekannt. Durch eine inverse Fourier-Transformation kann dann das Bild selbst berechnet werden.

Da die Fourier-Transformierte einer Funktion nicht überall in der Literatur gleich definiert wird (der Faktor 2π bereitet Probleme), hier die in dieser Arbeit benutzte Definition:

Definition(Fourier-Transformierte)¹: Sei $d \in \mathbb{N}$ eine beliebige Dimension und $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt

$$\widehat{\varphi} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \quad u \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} e^{-2\pi i \cdot u \cdot v} \cdot \varphi(v) dv \quad (3)$$

die Fourier-Transformierte von φ . Es sei darauf hingewiesen, daß $i \in \mathbb{C}$ die imaginäre Einheit und $u \cdot v$ das Skalarprodukt der Vektoren $u, v \in \mathbb{R}^d$ ist.² (In Bauer [2] findet sich eine Definition der Fourier-Transformierten ohne den Faktor 2π)

Satz(Fourier-Slice): Sei Γ_ϑ eine Gerade durch den Ursprung. Dann gilt für jeden Punkt $(t, f) \in \Gamma_\vartheta$:

$$picture(t, f) = projection_\vartheta(s) \quad (4)$$

Hierbei ist $s \in \mathbb{R}$ durch die Darstellung $(t, f) = (s \cdot \cos \vartheta, s \cdot \sin \vartheta)$ festgelegt

•

In Kak u. Slaney [7] ist der Fourier-Slice-Satz ebenfalls angegeben. Dort finden sich allerdings nicht die Zeit- und Frequenzparameter t und f , sondern andere Bezeichner. Der folgende Beweis ist auch dort angegeben. Ferner ist ein zweiter, längerer und auch komplizierterer Beweis angegeben, der nicht nur $projection_0$ berechnet, sondern *alle* Projektionen $projection_\vartheta$. Dieser an sich unnötige zweite Beweis ist durch seine größere Anschaulichkeit dennoch lesenswert. An dieser Stelle sei es aber mit dem Verweis getan.

Beweis:³

Offensichtlich muß die gewünschte Gleichheit nur für eine einzige Gerade Γ_ϑ gezeigt werden. Durch Drehen des Bildes $picture$ können nämlich alle Geraden ineinander überführt werden und es ist unerheblich, ob der Beweis mit dem Ausgangsbild oder einem vorab gedrehten Bild geführt wird.

O.B.d.A. wird deshalb die Gleichheit nur für die Zeit-Achse Γ_0 gezeigt.

¹Definitionen, Sätze, Lemmas oder Bemerkungen werden in dieser Arbeit nicht durchnummeriert, da eine solchermaßen erreichte Ordnung doch eher willkürlicher Natur ist. Bevorzugt werden eher aussagekräftige Benennungen, die in Klammern hinter die betreffende Definition, den betreffenden Satz, u.s.w gesetzt sind. Im folgenden wird über diese Bezeichnungen Bezug genommen. Außerdem werden in dieser Arbeit alle wichtigen Gleichungen durchnummeriert, sodaß hier eine weitere bequeme Bezugnahme zur Verfügung steht.

²Zur Notation: die Box • ist ein sehr großer Punkt und bezeichnet das Ende einer größeren logischen Einheit: einer Definition, eines Satzes, eines Beweises, etc.

³In dieser Arbeit finden sich eigentlich keine im strengen mathematischen Sinne korrekten Beweise. Wollte man dies, so wäre es nötig, in den betreffenden Sätzen weitere Voraussetzungen - etwa Stetigkeit, Differenzierbarkeit der Zeitsignale, oder ähnliches - aufzunehmen. Zum einen würde das den Rahmen dieser Arbeit sprengen, zum anderen ginge die in dieser Arbeit angestrebte Einfachheit verloren. Trotzdem ist dieser Punkt natürlich nicht ohne Relevanz. Und man sollte ihn mit Blick auf die spätere Implementation nicht aus dem Auge verlieren.

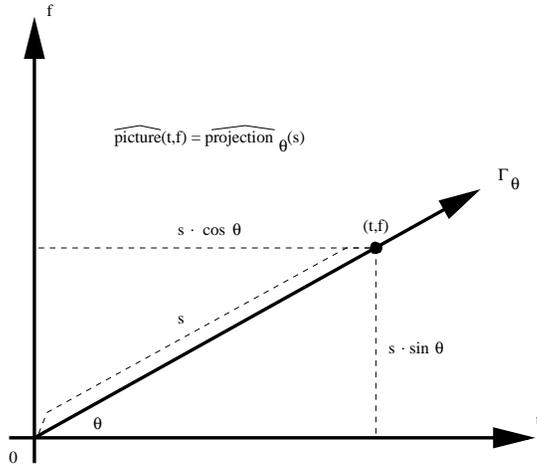


Abbildung 3: Zum Fourier-Slice-Satz

Es gilt für $\vartheta = 0$ und alle $s \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \widehat{picture}(s, 0) &=_{Def.(3)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \cdot (s,0) \cdot (t,f)} \cdot picture(t, f) \, df \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \cdot s \cdot t} \cdot picture(t, f) \, df \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \cdot s \cdot t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} picture(t, f) \, df \right) dt \\
 &=_{Def.(3)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i \cdot s \cdot t} \cdot projection_0(t) \, dt \\
 &=_{Def.(2)} \widehat{projection}_0(s)
 \end{aligned}$$

•

3 Die Wigner-Projektion

3.1 Definition der Wigner-Projektion, Berechnungen für 0° und 90°

Nach den einleitenden Worten ist klar, daß die Wigner-Projektion etwas mit den Projektionen der Wigner-Verteilung zu tun haben wird. Deshalb hier zunächst die Definition der Wigner-Verteilung (siehe etwa Claasen u. Mecklenbräucker [4]):

Definition(Wigner-Verteilung): Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal. Dann heißt

$$WD_x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad (t, f) \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) \cdot x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot \tau} \, d\tau \quad (5)$$

Wigner-Verteilung von x . In der Gleichung (5) steht x^* für das konjugiert komplexe Zeitsignal x , d.h. $x^* = Re(x) - Im(x) \bullet$

Definition(Wigner-Projektion): Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal. Dann heißt

$$WP_x : [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad (\vartheta, s) \mapsto \int_{\Gamma_{\vartheta, s}} WD_x(t, f) \, d(t, f) \quad (6)$$

Wigner-Projektion des Zeitsignals x . Für $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ heißt

$$WP_{x, \vartheta} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad s \mapsto WP(\vartheta, s) \quad (7)$$

ϑ -Wigner-Projektion von x •

Es ist klar, daß $WP_{x, \vartheta}$ für WD_x dieselbe Rolle spielt, wie $projection_\vartheta$ für $picture$. Mit dem Fourier-Slice-Satz gewinnt man daher sofort folgenden Zusammenhang:

Lemma: Sei Γ_ϑ eine Gerade durch den Ursprung. Dann gilt für jeden Punkt $(t, f) \in \Gamma_\vartheta$:

$$\widehat{WD}_x(t, f) = \widehat{WP}_{x, \vartheta}(s) \quad (8)$$

Hierbei ist $s \in \mathbb{R}$ eindeutig durch die Darstellung $(t, f) = (s \cdot \cos \vartheta, s \cdot \sin \vartheta)$ bestimmt •

Bemerkung: Die Wigner-Verteilung WD_x eines Zeitsignals x kann nach diesem Lemma also wie folgt bestimmt werden: zunächst werden alle Funktionen $WP_{x, \vartheta}$ aus WP_x berechnet. Danach erfolgt die Berechnung aller deren Fourier-Transformierten. Gleichung (8) gibt dann Auskunft, wie hieraus die Fourier-Transformierte \widehat{WD}_x der Wigner-Verteilung entlang aller Geraden Γ_ϑ zu berechnen ist. Die Sammlung aller dieser Berechnungen ergibt die Fourier-Transformierte \widehat{WD}_x auf ganz \mathbb{R}^2 . Daraus wird mit einer inversen (2-dimensionalen) Fourier-Transformation die Wigner-Verteilung selbst berechnet.

Dieses Verfahren - Berechnung der Wigner-Verteilung aus der Wigner-Projektion - ist jedoch nicht Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Hier sollten die für die Computertomographie entwickelten Algorithmen eingesetzt werden, die man etwa in Kak u. Slaney [7] findet.

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist vielmehr die Untersuchung des Ausgangsobjekts des eben vorgestellten Verfahrens: die Wigner-Projektion. Hierbei wird natürlich angestrebt, die Wigner-Projektion von der *definitiv* zugrundeliegenden Wigner-Verteilung zu lösen, da sonst das oben beschriebene Verfahren (Berechnung der Wigner-Verteilung aus *vorher* berechneter Wigner-Projektion) sinnlos, nämlich zirkulär wäre. Ziel der Arbeit ist die Berechnung der Wigner-Projektion direkt aus dem gegebenen Zeitsignal ohne Umwegnahme über die Wigner-Verteilung •

Zunächst sei bemerkt, daß für zwei Winkel ⁴, nämlich $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 90^\circ$, bereits Informationen über WP_x vorliegen:

Lemma:

$$WP_{x,0} = |x|^2 \quad (9)$$

$$WP_{x,90^\circ} = |X|^2 \quad (10)$$

Hierbei ist X die spektrale Energiedichte des Zeitsignals x •

Beweis: Wohlbekannt sind die folgenden Gleichungen: Für jedes $s \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD_x(s, f) df = |x(s)|^2 \quad (11)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} WD_x(t, s) dt = |X(s)|^2 \quad (12)$$

Siehe dazu Claasen u. Mecklenbräucker [4]. Mit ihnen und der Definition (6) ergeben sich leicht (9) und (10). Abbildung 4 verdeutlicht den Sachverhalt •

An dieser Stelle ist es höchste Zeit eine Bemerkung über den Parameter s anzustellen. In der Gleichung (11) fungiert s als Zeit-Parameter, in der Gleichung (12) als Frequenz-Parameter. Für andere Winkel ϑ wird sich s als Zwitter-Parameter aus Zeit und Frequenz darstellen.

3.2 Berechnung der Wigner-Projektion mit gedrehter Wigner-Verteilung

Im folgenden wird sich die Gleichung (9) noch als fruchtbar herausstellen. Es gelingt nämlich $WP_{x,\vartheta}$ mittels $WP_{x,0}$ zu berechnen. Allerdings wird $WP_{x,0}$ nicht mehr zu der Wigner-Verteilung WD_x gehören, sondern zu der entgegen

⁴Winkel haben in dieser Arbeit meistens die Einheit Bogenrad, d.h. sie sind dimensionslos. Der besseren Anschaulichkeit halber wird aber gelegentlich auch die Einheit $^\circ$ benutzt, wobei 1° den 360sten Teil des Vollkreiswinkels bezeichnet

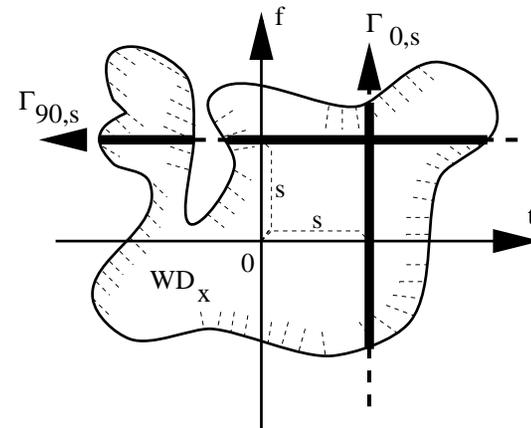


Abbildung 4: Momentan-Leistung und Spektral-Energie

den Winkel ϑ gedrehten Wigner-Verteilung. Damit sind folgende Definitionen angebracht:

Definition(Drehung): Sei $\vartheta \in [-\pi, \pi]$. Dann heißt die Abbildung

$$D_\vartheta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t, f) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot (t, f)$$

Drehung um ϑ . Hierbei ist \cdot das Matrizenprodukt ⁵

•

Diese Definition findet man in Büchern über analytische Geometrie und lineare Algebra, zum Beispiel in Fischer [3].

Bemerkung: Versteht man ϑ weiterhin als orientierten Winkel (und das wird empfohlen), so ist D_ϑ eine Drehung um den Betrag des Winkels ϑ ,

⁵In dieser Arbeit ist die Bedeutung der Notation (t, f) kontextabhängig:

- in Verbindung mit einem Matrizenprodukt wird (t, f) als 2×1 -Matrix, d.h. als Spaltenvektor $\begin{pmatrix} t \\ f \end{pmatrix}$ interpretiert (1×2 -Matrizen -Zeilenvektoren- kommen zwar in dieser Arbeit nicht explizit vor, könnten zur Unterscheidung von (t, f) aber mit $(t f)$ - ohne Komma- notiert werden)
- in Verbindung mit einem Funktionssymbol wird (t, f) als Argument der Funktion interpretiert

Damit wird die Frage offen gelassen, ob Elemente des \mathbb{R}^2 Zeilen- oder Spaltenvektoren sind. Eine Entscheidung für das eine oder andere trägt nach der Erfahrung des Autors wenig zur Klarheit und Konsistenz einer Arbeit bei.

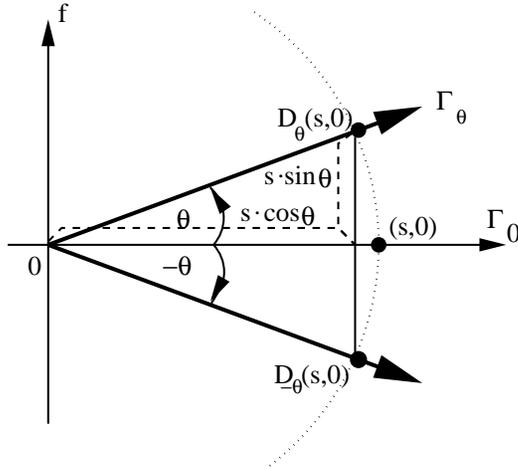


Abbildung 5: Drehung D_ϑ

und in dieselbe Richtung wie ϑ . In der Abbildung 5 sieht man, daß D_ϑ einen Punkt $(s, 0)$ der Geraden Γ_0 auf den Punkt $D_\vartheta(s, 0)$ abbildet, der auf der Geraden Γ_ϑ liegt. Eine kurze Berechnung bestätigt dies: $D_\vartheta(s, 0) = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot (s, 0) = (s \cdot \cos \vartheta, s \cdot \sin \vartheta)$. Ebenso einsichtig ist, daß unter D_ϑ die gesamte Gerade Γ_0 auf die Gerade Γ_ϑ abgebildet wird. D_ϑ dreht also in der Tat Objekte des \mathbb{R}^2 in der anschaulich gewohnten Art und Weise. Das folgende Beispiel ist die Drehung um 90° . Hier zeigt sich auch sehr schön, wie sich die Bedeutung der Parameter t und f vertauscht, was noch einmal ein Indiz für den zwitterhaften Charakter des Parameters s in den Gleichungen (11) und (12), respektive in (6) darstellt •

Beispiel:

$$D_{90^\circ}(t, f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (t, f) = (-f, t)$$

Die Drehrichtung stimmt also. Als lineare Abbildung ist D_{90° im Übrigen auch durch die Angabe:

$$D_{90^\circ}(1, 0) = (0, 1) \quad D_{90^\circ}(0, 1) = (-1, 0)$$

vollständig bestimmt •

Definition(gedrehte Wigner-Verteilung): Sei WD_x eine Wigner-Verteilung und $\vartheta \in [-\pi, \pi]$. Dann heißt:

$$WD_{x,\vartheta} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (t, f) \mapsto WD_x(D_\vartheta(t, f)) \quad (13)$$

entgegen ϑ gedrehte Wigner-Verteilung •

Bemerkung: Wer auf Funktionsargumente verzichten möchte, kann folgende Funktions-Gleichung benutzen:

$$WD_{x,\vartheta} := WD_x \circ D_\vartheta$$

Hierbei ist \circ die Hintereinanderausführung von Abbildungen, wobei (bei ungekennzeichneten Ausdrücken) die am weitesten rechts stehende Abbildung zuerst angewandt wird •

Bemerkung: Es mag etwas befremden, daß in der Definition (13) von $WD_{x,\vartheta}$ als einer entgegen ϑ gedrehten Wigner-Verteilung gesprochen wird. Die Abbildung 6 gibt aber Aufschluß. ϑ ist hierin mathematisch positiv orientiert. Eine Drehung entgegen ϑ ist also eine Drehung in mathematisch negativem Sinn, dem Uhrzeigersinn. In der Abbildung kann man sich in der Tat vorstellen, daß $WD_{x,\vartheta}$ aus einer im Uhrzeigersinn erfolgten Drehung aus WD_x entstanden ist. Für die Berechnung von $WD_{x,\vartheta}$ an der Stelle $(s, 0) \in \Gamma_0$ benötigt man WD_x an der Stelle $(t, f) \in \Gamma_\vartheta$. Der Abbildung entnimmt man aber $(t, f) = D_\vartheta(s, 0)$, woraus sich wie gewünscht $WD_{x,\vartheta}(s, 0) = WD_x(t, f) = WD_x(D_\vartheta(s, 0))$, oder $WD_{x,\vartheta} = WD_x \circ D_\vartheta$ ergibt.

Zusammenfassend sollte man also unterscheiden: Für ein Objekt O des \mathbb{R}^2 ist zwar $D_\vartheta(O)$ das um ϑ gedrehte Objekt. Für ein Bild *picture* (hier WD_x) ist jedoch *picture* $\circ D_\vartheta$ das entgegen ϑ gedrehte Bild •

Hier die versprochene Berechnung der ϑ -Wigner-Projektion als eine 0-Wigner-Projektion einer gedrehten Wigner-Verteilung:

Lemma: Für alle $(\vartheta, s) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ gilt:

$$WP_x(\vartheta, s) = \int_{\Gamma_{0,s}} WD_{x,\vartheta}(t, f) d(t, f) \quad (14)$$

•

Beweis: Sei also $(\vartheta, s) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$WP_x(\vartheta, s) =_{Def.(6)} \int_{\Gamma_{\vartheta,s}} WD_x(t, f) d(t, f)$$

Die Substitution $(t, f) = D_\vartheta(t', f')$ liefert:

$$WP_x(\vartheta, s) = \int_{\Gamma_{0,s}} WD_x(D_\vartheta(t', f')) \cdot 1 d(t', f')$$

Dabei steht die 1 für die Funktionaldeterminante der Drehung D_ϑ . Ferner muß man sich klarmachen, daß: $(t, f) \in \Gamma_{\vartheta,s}$ *gdw.* $(t', f') \in \Gamma_{0,s}$. (Die richtige Anwendung der 2-dimensionalen Substitutionsregel entnimmt man zum Beispiel Erwe [1].) Der Rest ergibt sich mit Definition (13) und der trivialen Substitution $(t, f) = (t', f')$ •

Diese Lemma erhält im nächsten Abschnitt eine Fortsetzung. Vorher wird aber eine wichtige Frage geklärt.

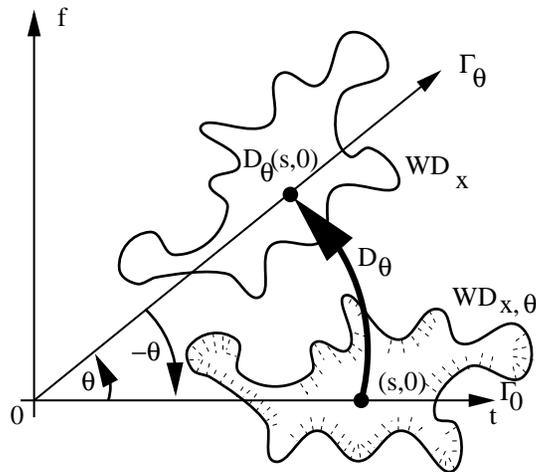


Abbildung 6: Entgegen ϑ gedrehte Wigner-Verteilung

3.3 Sind gedrehte Wigner-Verteilungen Wigner-Verteilungen ?

In Definition (13) wurden gedrehte Wigner-Verteilungen eingeführt. Wie sich in den nächsten Abschnitten zeigen wird, ist der Name *gedrehte Wigner-Verteilung* nicht nur Schall und Rauch. Es wurde ja schon gezeigt - was auch die Namensgebung motiviert hat - daß eine gedrehte Wigner-Verteilung durch Drehung aus einer Wigner-Verteilung entsteht. Es gilt jedoch noch mehr: Gedrehte Wigner-Verteilungen *sind* Wigner-Verteilungen, d.h. zu jeder gedrehten Wigner-Verteilung $WD_{x,\vartheta}$ gibt es ein Zeitsignal x_ϑ , sodaß $WD_{x,\vartheta}$ Wigner-Verteilung von x_ϑ ist. Für diese Tatsache ist ein Satz fällig.

Satz(Signal-Existenz): Eine gedrehte Wigner-Verteilung ist eine Wigner-Verteilung, d.h. zu jedem Zeitsignal x und für jeden Winkel $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ gibt es ein Zeitsignal x_ϑ , sodaß:

$$WD_{x,\vartheta} = WD_{x_\vartheta} \quad (15)$$

•

Der Beweis dieses Satzes erfordert einige Vorbereitung. Hier eine wichtige Folgerung:

Korollar: Für alle $(\vartheta, s) \in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ gilt:

$$WP_x(\vartheta, s) = |x_\vartheta(s)|^2 \quad (16)$$

Hierbei ist x_ϑ das Zeitsignal aus dem Signal-Existenz-Satz •

Beweis:

$$\begin{aligned} WP_x(\vartheta, s) &=_{Gl.(14)} \int_{\Gamma_{0,s}} WD_{x,\vartheta}(t, f) d(t, f) \\ &=_{Def. \text{ von } x_\vartheta} \int_{\Gamma_{0,s}} WD_{x_\vartheta}(t, f) d(t, f) \\ &=_{Def.(6)} WP_{x_\vartheta}(0, s) \\ &=_{Def.(7)} WP_{x_\vartheta,0}(s) \\ &=_{Gl.(9)} |x_\vartheta(s)|^2 \end{aligned}$$

•

D.h. die ϑ -Wigner-Projektion rechnet sich als Momentan-Leistung aus einem Zeitsignal x_ϑ . Dieser Sachverhalt - zu beweisen über das Nebenresultat: gedrehte Wigner-Verteilungen sind Wigner-Verteilungen - ist das eigentliche Motiv für die Suche nach den Zeitsignalen x_ϑ . Mit dieser wichtigen Bemerkung soll dieser Abschnitt enden.

3.4 Standortwechsel: Die Wigner-Verteilung von manipulierten Zeit-Signalen

Dem unvoreingenommenen Leser wird auffallen, daß der zentrale Satz des vorherigen Abschnitts zwar als eine Art *Signal-Existenz-Aussage* formuliert wurde, durchaus aber auch anders interpretiert werden kann. Etwas anders gelesen besagt der Satz nämlich: ist ein aus einem Zeitsignal x durch gewisse Manipulationen hervorgegangenes Zeitsignal \tilde{x} gegeben, so berechnet sich die Wigner-Verteilung $WD_{\tilde{x}}$ des Signals \tilde{x} durch gewisse Manipulationen (im Satz beispielsweise durch eine Drehung) aus der Wigner-Verteilung WD_x des Signals x .

Diese Sichtweise ist nicht neu. Für die Wigner-Verteilung sind derartige Aussagen bereits bekannt. Es erfolgt eine Auflistung, die beim ersten Lesen übergangen werden kann. In den anschließenden Ausführungen wird man Spezialfällen von Filtering und Modulation begegnen, ansonsten dient die Auflistung in erster Linie der Demonstration, daß sich der Standortwechsel lohnt und man in die eingeschlagene Richtung gut weitergehen kann. Zuvor aber noch die Definition der im folgenden noch oft gebrauchten Faltung zweier Funktionen (siehe dazu Bauer [2]).

Definition(Faltung): Für zwei Funktionen $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt:

$$\varphi * \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad u \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(v)\psi(u-v) \, dv \quad (17)$$

Faltung von φ und ψ •

Nun die Auflistung, die Claasen u. Mecklenbräucker [4] entnommen wurde:

Lemma(Time Shift) ⁶ : Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal, sei $t_0 \in \mathbb{R}$ und:

$$\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto x(t - t_0)$$

Dann gilt für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$WD_{\tilde{x}}(t, f) = WD_x(t - t_0, f) \quad (18)$$

•

Lemma(Frequency Shift): Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal, sei $f_0 \in \mathbb{R}$ und:

$$\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto x(t) \cdot e^{2\pi i \cdot f_0 \cdot t}$$

Dann gilt für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$WD_{\tilde{x}}(t, f) = WD_x(t, f - f_0) \quad (19)$$

•

Lemma(Filtering): Seien x und y reell- oder komplexwertige Zeitsignale und sei:

$$\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto x * y(t)$$

Dann gilt für alle $f \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung ⁷:

$$WD_{\tilde{x}}(., f) = WD_x(., f) * WD_y(., f)$$

Oder: für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$WD_{\tilde{x}}(t, f) = [WD_x(., f) * WD_y(., f)](t) \quad (20)$$

•

Lemma(Modulation): Seien x und y reell- oder komplexwertige Zeitsignale und sei:

$$\tilde{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto x \cdot y(t)$$

⁶Die nächsten vier Lemmata tragen englische Namen, da sie sich nur schwer ins Deutsche übertragen lassen, da naheliegende Übersetzungen oft schon eine gewisse Vorbedeutung tragen, die mit den in den Lemmata vermittelten Sachverhalten inkonsistent sind.
⁷Dabei notiert $WD_x(., f)$ für festes $f \in \mathbb{R}$ eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $t \mapsto WD_x(t, f)$. Entsprechendes gilt natürlich für $WD_x(., f)$ und $WD_y(., f)$.

Dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ die folgende Gleichung ⁸:

$$\text{Oder: für alle } (t, f) \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt: } WD_{\tilde{x}}(t, \cdot) = WD_x(t, \cdot) * WD_y(t, \cdot) \quad (21)$$

$$WD_{\tilde{x}}(t, f) = [WD_x(t, \cdot) * WD_y(t, \cdot)](f)$$

•

Im nächsten Abschnitt wird diese Liste weiter ergänzt.

3.5 Manipulationen des Zeitsignals mit Chirp-Funktionen und deren Auswirkungen auf die Wigner-Verteilung

Definition(Chirp) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann heißt:

$$\text{chirp}_\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto e^{\pi i \alpha t^2} \quad (22)$$

Chirp-Funktion •

Im folgenden wird untersucht, wie sich Multiplikation und Faltung des Zeitsignals mit einem Chirp auf die Wigner-Verteilung des Zeitsignals auswirken. Zunächst die Multiplikation:

Lemma(Chirp-Modulation) Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal. Dann gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$WD_{x \cdot \text{chirp}_\alpha}(t, f) = WD_x(t, f - \alpha \cdot t) \quad (23)$$

•

Beweis: Es gibt zwei Wege, um Gleichung (23) zu zeigen. Einmal könnte man versuchen, das Modulation-Lemma des vorherigen Abschnitts anzuwenden. Dazu müßte man allerdings die Wigner-Verteilung eines Chirps kennen. Dies ist keine große Schwierigkeit und weiter unten wird sie auch berechnet. Da in dieser Arbeit aber kein Beweis des Modulation-Lemmas durchgeführt wurde, wird an dieser Stelle der direkte Weg bevorzugt, der auch außerdem *straight-forward* abläuft:

$$WD_{x \cdot \text{chirp}_\alpha}(t, f) =_{Def.(5)} \int_{-\infty}^{\infty} (x \cdot \text{chirp}_\alpha)(t + \tau) \cdot \left((x \cdot \text{chirp}_\alpha)(t - \frac{\tau}{2}) \right)^* \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot \tau} \, d\tau$$

Unter Benutzung von $(p \cdot q)^* = p^* \cdot q^*$ für $p, q \in \mathbb{C}$ gilt dann:

$$WD_{x \cdot \text{chirp}_\alpha}(t, f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot \text{chirp}_\alpha(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot \left(\text{chirp}_\alpha(t - \frac{\tau}{2}) \right)^* \cdot e^{-2\pi i \cdot f \cdot \tau} \, d\tau$$

⁸Dabei ist $WD_x(t, \cdot)$ für festes $t \in \mathbb{R}$ eine Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f \mapsto WD_x(t, f)$. Entsprechend $WD_{\tilde{x}}(t, \cdot)$ und $WD_y(t, \cdot)$.

$$=_{Def.(22)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot e^{\pi i \alpha (t + \frac{\tau}{2})^2} \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot (e^{\pi i \alpha (t - \frac{\tau}{2})^2})^* \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau$$

An dieser Stelle wird nun ausgenutzt, daß $(e^{\lambda i})^* = e^{-\lambda i}$ für eine reelle Zahl λ gilt. Da $\pi \cdot \alpha \cdot (t - \frac{\tau}{2})^2$ reellwertig ist, folgt:

$$\begin{aligned} WD_{x \text{ chirp}_\alpha}(t, f) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) e^{\pi i \alpha (t + \frac{\tau}{2})^2} \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-\pi i \alpha (t - \frac{\tau}{2})^2} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{\pi i \alpha (t + \frac{\tau}{2})^2 - \pi i \alpha (t - \frac{\tau}{2})^2} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{\pi i \alpha (t^2 + \tau t + \frac{\tau^2}{4}) - \pi i \alpha (t^2 - \tau t + \frac{\tau^2}{4})} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{2\pi i \alpha \tau t} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{2\pi i \alpha t \tau - 2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \frac{\tau}{2}) \cdot x^*(t - \frac{\tau}{2}) \cdot e^{-2\pi i (f - \alpha t) \tau} d\tau \\ &=_{Def.(5)} WD_x(t, f - \alpha t) \end{aligned}$$

•

Lemma(Chirp-Filtering) Sei x ein reell- oder komplexwertiges Zeitsignal. Dann gilt für alle $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$WD_{x \text{ chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(t, f) = WD_x(t - \beta \cdot f, f) \quad (24)$$

•

Hier ist es wesentlich bequemer, das Filtering-Lemma aus dem vorherigen Abschnitt heranzuziehen, als den Beweis auf direktem Weg anzugehen. Es wird zunächst die Wigner-Verteilung eines Chirps berechnet:

Lemma(Wigner-Verteilung eines Chirps) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$WD_{\text{chirp}_\lambda} = \infty \quad \text{auf der Geraden } \{(t, f) \in \mathbb{R}^2 | f = \lambda \cdot t\}^9$$

und

$$WD_{\text{chirp}_\lambda} = 0 \quad \text{sonst}$$

D.h. die Wigner-Verteilung eines Chirps stellt sich als eine δ -Funktion dar.

•

⁹Diese Gleichung soll wegen $\infty \in \bar{\mathbb{R}} \setminus \mathbb{R}$ zum einem ausdrücken, daß $WD_{\text{chirp}_\lambda}$ keine Wigner-Verteilung ist, da Wigner-Verteilungen wegen Definition (5) immer reellwertig sind. In diesem Sinne darf $WD_{\text{chirp}_\lambda} = \infty$ als $WD_{\text{chirp}_\lambda} = \text{undefiniert}$ gelesen werden. Zum anderen soll $WD_{\text{chirp}_\lambda} = \infty$ auf... ausdrücken, daß $WD_{\text{chirp}_\lambda}$ zur Klasse der verallgemeinerten Funktionen gehört. Da $WD_{\text{chirp}_\lambda}$ eine besonders einfache verallgemeinerte Funktion ist und die mit $WD_{\text{chirp}_\lambda}$ vorgenommenen Rechnungen trivial sind, werden diese im folgenden nicht besonders kommentiert.

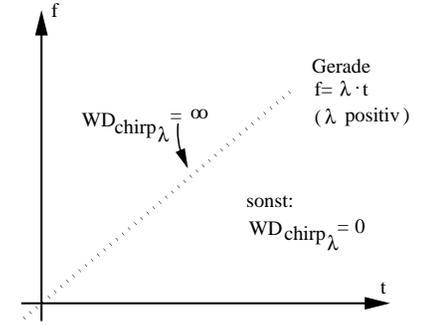


Abbildung 7: Wigner-Verteilung von chirp_λ

Beweis(Wigner-Verteilung eines Chirps): Die ersten Beweis-Schritte waren im wesentlichen schon mal da:

$$\begin{aligned} WD_{\text{chirp}_\lambda}(t, f) &=_{Def.(5)} \int_{-\infty}^{\infty} \text{chirp}_\lambda(t + \frac{\tau}{2}) \cdot (\text{chirp}_\lambda(t - \frac{\tau}{2}))^* \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &=_{Def.(22)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \lambda (t + \frac{\tau}{2})^2} \cdot (e^{\pi i \lambda (t - \frac{\tau}{2})^2})^* \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \lambda (t + \frac{\tau}{2})^2} \cdot e^{-\pi i \lambda (t - \frac{\tau}{2})^2} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pi i \lambda (t^2 + \tau t + \frac{\tau^2}{4})} \cdot e^{-\pi i \lambda (t^2 - \tau t + \frac{\tau^2}{4})} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i \lambda \tau t} \cdot e^{-2\pi i f \tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i (f - \lambda t) \tau} d\tau \end{aligned}$$

Und durch Fallunterscheidung $f - \lambda \cdot t = 0$ beziehungsweise $f - \lambda \cdot t \neq 0$ erhält man die Behauptung •

Beweis(Chirp-Filtering): Mit dem Filtering-Lemma gilt:

$$\begin{aligned} WD_{x \text{ chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(t, f) &= (WD_x(\cdot, f) * WD_{\text{chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(\cdot, f))(t) \\ &=_{Def.(17)} \int_{-\infty}^{\infty} WD_x(t - \tau, f) \cdot WD_{\text{chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(\tau, f) d\tau \end{aligned}$$

Da $(\tau, f) \mapsto WD_{\text{chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(\tau, f)$ eine δ -Funktion entlang der Geraden $\{f = \frac{1}{\beta} \cdot \tau\}$ ist und man diese Gerade für $\beta \neq 0$ auch als $\{\tau = \beta \cdot f\}$ darstellen kann, folgt sofort:

$$WD_{x \text{ chirp}_{\frac{1}{\beta}}}(t, f) = WD_x(t - \beta \cdot f, f)$$

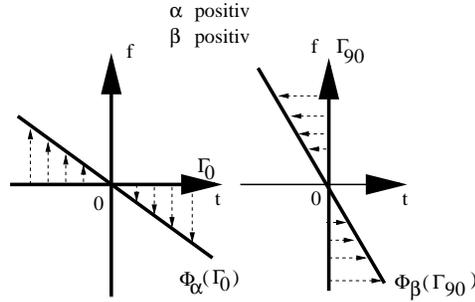


Abbildung 8: Die Scherungen Φ_α^\perp und Φ_β^\leftarrow

•

Es wird nun versucht, Chirp-Filtering und Chirp-Modulation geometrisch zu deuten. Dazu dienen folgende Definitionen.

Definition (Vertikal-Scherung): Für $\alpha \in \mathbb{R}$ heißt die lineare Abbildung

$$\Phi_\alpha^\perp : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t, f) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot (t, f) = (t, f - \alpha \cdot t) \quad (25)$$

Vertikal-Scherung •

Definition (Horizontal-Scherung): Für $\beta \in \mathbb{R}$ heißt die lineare Abbildung

$$\Phi_\beta^\leftarrow : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (t, f) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (t, f) = (t - \beta \cdot f, f) \quad (26)$$

Horizontal-Scherung •

Bemerkung: Die Abbildung 8 verdeutlicht die geometrischen Eigenschaften dieser Scherungen: Die Zeit-Achse wird unter Φ_α^\perp in die Gerade $\{f = -\alpha \cdot t\}$ und die Frequenz-Achse wird unter Φ_β^\leftarrow in die Gerade $\{t = -\beta \cdot f\}$ überführt. Für positives $\alpha \in \mathbb{R}$ ist Φ_α^\perp eine vertikale Scherung nach unten, für positives $\beta \in \mathbb{R}$ ist Φ_β^\leftarrow eine horizontale Scherung nach links

Grundsätzlich muß man aber auch hier - wie schon bei den Drehungen - unterscheiden, ob eine Scherung auf ein Objekt des \mathbb{R}^2 oder ein Bild in der Ebene \mathbb{R}^2 angewandt wird. Genauer:

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ positiv gewählt, sei O ein Objekt des \mathbb{R}^2 (etwa eine Gerade Γ_θ) und sei $picture$ ein Bild im \mathbb{R}^2 (man denke hierbei an die Wigner-Verteilung). Dann ist $\Phi_\alpha^\perp(O)$ ein nach *unten* geschertes Objekt, hingegen $picture \circ \Phi_\alpha^\perp$ ein nach *oben* geschertes Bild.

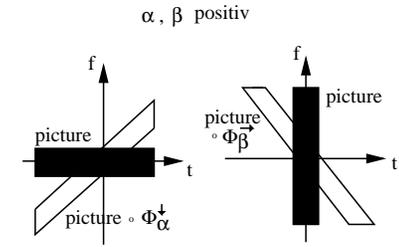


Abbildung 9: Mit Φ_α^\perp und Φ_β^\leftarrow gescherte Bilder

Für Φ_β^\leftarrow gilt analog: Ist $\beta \in \mathbb{R}$ positiv gewählt, O ein Objekt des \mathbb{R}^2 und $picture$ ein Bild im \mathbb{R}^2 , so ist $\Phi_\beta^\leftarrow(O)$ ein nach *links* geschertes Objekt, hingegen $picture \circ \Phi_\beta^\leftarrow$ ein nach *rechts* geschertes Bild.

Die Orientierung kehrt sich bei dem Standortwechsel *Objekt* versus *Bild* also gerade um. Diese Situation war auch schon bei den Drehungen vorhanden und sollte den Leser nicht mehr allzu sehr verwirren. Die Abbildung 9 stellt die Situation für positive Parameter α und β dar •

Diesen Abschnitt soll das folgende Lemma abschließen. Die Notation nähert sich dabei etwas an die Notation des Signal-Existenz-Satzes des vorherigen Abschnitts an.

Lemma (gescherte Wigner-Verteilungen): Sei x ein Zeitsignal und seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$. Dann sind die gescherten Wigner-Verteilungen $WD_x \circ \Phi_\alpha^\perp$ und $WD_x \circ \Phi_\beta^\leftarrow$ Wigner-Verteilungen, d.h. es gibt zwei Zeitsignale x_α^\perp und x_β^\leftarrow mit:

$$WD_x \circ \Phi_\alpha^\perp = WD_{x_\alpha^\perp}, \quad WD_x \circ \Phi_\beta^\leftarrow = WD_{x_\beta^\leftarrow} \quad (27)$$

•

Beweis: Wähle für beliebiges $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$x_\alpha^\perp := x \cdot chirp_\alpha \quad (28)$$

Für $\beta \in \mathbb{R}$ ist darauf zu achten, ob $\beta = 0$. Wähle:

$$x_\beta^\leftarrow := x * chirp_{\frac{1}{\beta}} \quad (\beta \neq 0), \quad x_\beta^\leftarrow := x \quad (\beta = 0) \quad (29)$$

Dann gilt für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (WD_x \circ \Phi_\alpha^\perp)(t, f) &= WD_x(\Phi_\alpha^\perp(t, f)) \\ &=_{Def.(25)} WD_x(t, f - \alpha \cdot t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=_{\text{Glg.}(23)} WD_{x\text{-chirp}_\alpha}(t, f) \\
&=_{\text{Glg.}(28)} WD_{x_\alpha^\downarrow}(t, f)
\end{aligned}$$

Für $\beta = 0$ ist nichts zu zeigen. Für $\beta \neq 0$ gilt für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
(WD_x \circ \Phi_\beta^\leftarrow)(t, f) &= WD_x(\Phi_\beta^\leftarrow(t, f)) \\
&=_{\text{Def.}(26)} WD_x(t - \beta \cdot f, f) \\
&=_{\text{Glg.}(24)} WD_{x \text{ chirp } \frac{1}{\beta}}(t, f) \\
&=_{\text{Glg.}(29)} WD_{x_\beta^\leftarrow}(t, f)
\end{aligned}$$

•

3.6 Gedrehte Wigner-Verteilungen sind Wigner-Verteilungen !

Die positive Beantwortung, ob gedrehte Wigner-Verteilungen Wigner-Verteilungen sind, fällt jetzt relativ leicht. Die Strategie wird sein, Drehungen als Hintereinanderausführung von Horizontal- und/oder Vertikal-Scherungen darzustellen. Iterierte Anwendung des Lemmas aus dem vorherigen Abschnitt ergibt dann das gewünschte Ergebnis.

Lemma: Sei $\vartheta \in [-\pi, \pi]$, $\vartheta \neq \pi$ und $\vartheta \neq -\pi$. Dann gilt mit:

$$\beta := \sin \vartheta, \quad \alpha := \frac{\cos(\vartheta) - 1}{\sin \vartheta} \quad (\alpha := 0 \text{ falls } \vartheta = 0) \quad (30)$$

die folgende Darstellung:

$$D_\vartheta = \Phi_\alpha^\downarrow \circ \Phi_\beta^\leftarrow \circ \Phi_\alpha^\downarrow \quad (31)$$

D.h. für alle $(t, f) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$D_\vartheta(t, f) = \Phi_\alpha^\downarrow \left(\Phi_\beta^\leftarrow \left(\Phi_\alpha^\downarrow(t, f) \right) \right) \quad (32)$$

•

Beweis: Für $\vartheta = 0$ ist $\alpha = \beta = 0$ und die Gleichung (31) verkommt zur Trivialität, da alle beteiligten Abbildungen gleich der Identität sind. Sei also $\vartheta \neq 0$. Wegen der Einschränkung $\vartheta \neq \pi$ und $\vartheta \neq -\pi$ ist dann $\sin \vartheta \neq 0$, d.h. α ist definiert. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_\beta^\leftarrow \circ \Phi_\alpha^\downarrow &= \Phi_{\sin \vartheta}^\leftarrow \circ \Phi_{\frac{\cos(\vartheta)-1}{\sin \vartheta}}^\downarrow \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -\sin \vartheta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 - \sin \vartheta \cdot \left(\frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) & -\sin \vartheta \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

23

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 - (1 - \cos \vartheta) & -\sin \vartheta \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
\Phi_\alpha^\downarrow \circ \left(\Phi_\beta^\leftarrow \circ \Phi_\alpha^\downarrow \right) &= \Phi_{\frac{\cos(\vartheta)-1}{\sin \vartheta}}^\downarrow \circ \left(\Phi_{\sin \vartheta}^\leftarrow \circ \Phi_{\frac{\cos(\vartheta)-1}{\sin \vartheta}}^\downarrow \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \left(\frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) + \frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} & -\sin \vartheta \cdot \left(\frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ (1 + \cos \vartheta) \cdot \left(\frac{1-\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right) & -(1 - \cos \vartheta) + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \frac{1-\cos^2 \vartheta}{\sin \vartheta} & -1 + \cos \vartheta + 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \frac{\sin^2 \vartheta}{\sin \vartheta} & \cos \vartheta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

•

Beweis des Signal-Existenz-Satzes: Der Beweis für $\vartheta = \pi$ und $\vartheta = -\pi$ muß extra geführt werden. Für alle anderen $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ gilt mit dem Zeitsignal

$$x_\vartheta := \left(\left(x_\alpha^\downarrow \right)_\beta^\leftarrow \right)_\alpha^\downarrow \quad (33)$$

(α und β gemäß (30) gewählt) die Gleichung (15). Für $\beta \neq 0$ gilt übrigens gemäß der Gleichungen (29) und (28):

$$x_\vartheta = \left((x \cdot \text{chirp}_\alpha) * \text{chirp}_{\frac{1}{\beta}} \right) \cdot \text{chirp}_\alpha \quad (34)$$

Diese Gleichung wird später noch ausgenützt. Es wird nun die Gleichung (15) gezeigt. Sei also $(t, f) \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
WD_{x,\vartheta}(t, f) &= WD_x(D_\vartheta(t, f)) \\
&= WD_x \left(\Phi_\alpha^\downarrow \left(\Phi_\beta^\leftarrow \left(\Phi_\alpha^\downarrow(t, f) \right) \right) \right) \\
&= WD_{x_\alpha^\downarrow} \left(\Phi_\beta^\leftarrow \left(\Phi_\alpha^\downarrow(t, f) \right) \right)
\end{aligned}$$

24

$$\begin{aligned}
&= WD_{(x_\alpha^\downarrow)_\beta} \left(\Phi_\alpha^\downarrow(t, f) \right) \\
&= WD_{\left((x_\alpha^\downarrow)_\beta \right)_\alpha}^\downarrow(t, f)
\end{aligned}$$

•

3.7 Die Berechnung der Wigner-Projektion aus dem Zeitsignal

Hier nun das Ergebnis dieser Arbeit. Als unmittelbare Schlussfolgerung aus dem Signal-Existenz-Satz erhält man:

Korollar: Für alle $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ mit $\sin \vartheta \neq 0$ gilt:

$$WP_\vartheta = |x \cdot chirp_\alpha * chirp_{\frac{1}{\beta}}|^2 \quad (35)$$

Hierbei sind α und β gemäß (30) gewählt, d.h.

$$WP_\vartheta = \left| x \cdot chirp_{\frac{\cos(\vartheta)-1}{\sin \vartheta}} * chirp_{\frac{1}{\sin \vartheta}} \right|^2 \quad (36)$$

•

Beweis: Mit den Gleichungen (16), (34) und der leicht zu verifizierenden Eigenschaft $|chirp_\alpha| = 1$ ergibt sich die Behauptung •

4 Bemerkungen

Dieser Abschnitt faßt weitere Ergebnisse zusammen, die sich im Verlauf der Arbeit angesammelt haben.

Bemerkung: Zunächst soll auf folgende zu Gleichung (31) duale Gleichung aufmerksam gemacht werden: für alle $\vartheta \in [-\pi, \pi]$ gibt es gewisse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodaß

$$D_\vartheta = \Phi_\beta^{\leftarrow} \circ \Phi_\alpha^\downarrow \circ \Phi_\beta^{\leftarrow} \quad (37)$$

Der genigte Leser mag dies verifizieren. Interessant ist aber die aus Gleichung (37) zu ziehende Folgerung: Auch hier gelangt man zu einem Zeitsignal x_ϑ , welches die Gleichung (16) erfüllt. Allerdings löst sich $|x_\vartheta|^2$ für dieses Zeitsignal nicht mehr so schön in Wohlgefallen auf. In der Gleichung (35) entsprechenden Gleichung bleiben *drei* Chirps bestehen, zudem hat man *zwei* Faltungen durchzuführen. Die Wahl von Gleichung (31) ist also in diesem Sinn als optimal anzusehen •

Bemerkung: Es soll weiterhin darauf aufmerksam gemacht werden, daß eine Drehung keinesfalls Hintereinanderausführung nur zweier Vertikal- und/oder Horizontal-Scherungen sein kann, d.h. es gibt keine $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sodaß:

$$D_\vartheta = \Phi_\beta^{\leftarrow} \circ \Phi_\alpha^\downarrow$$

oder:

$$D_\vartheta = \Phi_\alpha^\downarrow \circ \Phi_\beta^{\leftarrow}$$

Trotz dieser Tatsache stehen in Gleichung (35) nur zwei Chirps. Dies ist also ein gewisser Erfolg

(Die Annahme, daß eine der beiden Gleichungen erfüllt werden kann, kann mit der entsprechenden Matrizen-Gleichung zum Widerspruch geführt werden. Ist etwa:

$$D_\vartheta = \Phi_\alpha^\downarrow \circ \Phi_\beta^{\leftarrow}$$

So folgt:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Also:

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & -\sin \vartheta \\ \sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\alpha & 1 + \alpha\beta \end{pmatrix}$$

D.h. insbesondere gilt für alle Winkel ϑ , daß $\cos \vartheta = 1$. *Widerspruch* •

Bemerkung: Die Gleichung (31) mit α, β gemäß Gleichung (30) wurde aus dem Ansatz

$$\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix} = \Phi_\alpha^\downarrow \circ \Phi_\beta^{\leftarrow} \circ \Phi_\alpha^\downarrow \quad (38)$$

gewonnen. Dabei ist es sehr beachtlich, daß die Matrix $\begin{pmatrix} C & -S \\ S & C \end{pmatrix}$ noch keine Drehmatrix ist. Dazu wäre nämlich noch die Determinantenbedingung $C^2 + S^2 = 1$ zu erfüllen. Im Klartext: die Lösungen α und β des Ansatzes (38) führen *automatisch* zu Drehmatrizen, d.h. zu C und S , welche die Determinantenbedingung erfüllen. D.h. an dieser Stelle wird einem etwas quasi "geschenkt". Dem Verfasser ist unklar, welche Eigenschaft der Wigner-Verteilung für diese erstaunliche Tatsache verantwortlich ist •

Vermutung: Vermutlich kann der Signal-Existenz-Satz wie folgt verstärkt werden: Sei x ein Zeitsignal und sei $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine bijektive, affine Abbildung. Dann gibt es ein Zeitsignal x_T , sodaß:

$$WD_x \circ T = WD_{x_T} \tag{39}$$

•
Ausblick: Mit der Instantiierung der Gleichung (36) sollte nun folgende Berechnung der Wigner-Verteilung aus dem Zeitsignal möglich sein:

- In einem ersten Schritt wird für ein gegebenes Zeitsignal gemäß der Gleichung (36) die Wigner-Projektion berechnet.
- In einem zweiten Schritt wird dann daraus mit Algorithmen aus der Computertomographie die Wigner-Verteilung berechnet.

•
Ausblick: Eventuell könnte es sich zeigen, daß schon die Wigner-Projektion *an sich* ein für den Phonetiker geeignetes Instrument für die Analyse von Sprachsignalen darstellt, denn:

- Die Wigner-Projektion ist wie die Wigner-Verteilung ein (reellwertiges) zweidimensionales Bild eines Sprachsignals.
- Die Wigner-Projektion trägt dieselbe Information wie die Wigner-Verteilung, da sich die Wigner-Verteilung aus der Wigner-Projektion, aber auch die Wigner-Verteilung aus der Wigner-Projektion berechnen läßt

•

5 Eine Implementierung der Wigner-Projektion

Der nun folgende Teil ist die Dokumentation einer Implementierung des Korollars (36) in der Programmiersprache MATLAB.

Um ganz kurz auf MATLAB einzugehen: MATLAB zeichnet sich dadurch aus, daß es sehr gut mit Vektoren und Matrizen umgehen kann. Dies ist von Vorteil, wenn Zeitsignale bearbeitet werden müssen, da diese in der digitalen Verarbeitung immer als Vektoren vorliegen. Ein zweiter Punkt, der MATLAB auszeichnet: in MATLAB stehen sehr viele graphische Funktionen zur Verfügung, sodaß man in der Regel die untersuchten Objekte sehr gut visualisieren kann.

Die hier vorgestellte Implementation umfaßt die folgenden Funktionen: *test, test1, test2, test3, wp, faltung, chirp*.

Die Funktionen *test, test1, test2, test3* dienen, wie ihr Name andeutet, dem Test der Implementation. Genauer:

- In *test* wird ein Überblick über die implementierten Test-Zeitsignale gegeben. Der Anwender erhält in MATLAB diesen Überblick mit dem Befehl *help test*.
- In den Funktionen *test1, test2, test3* sind Test-Zeitsignale implementiert. Nach Aufruf einer dieser Funktionen (von MATLAB aus) erfolgt ein Bildschirm-Ausdruck der Wigner-Projektion des entsprechenden Zeitsignals.

Es ist möglich, die Test-Funktionen sukzessive zu erweitern. In dieser Arbeit wird nicht weiter auf die Test-Funktionen eingegangen. Die folgenden Abschnitte gehen auf die zentralen Funktionen *faltung, chirp, wp* ein.

5.1 Die Funktion *faltung*

Gleichung (36) zeigt, daß zur Berechnung der Wigner-Projektion WP_ϑ drei Funktionen, nämlich x , $chirp_{\frac{\cos(\vartheta)-1}{\sin \vartheta}}$, $chirp_{\frac{1}{\sin \vartheta}}$ und drei Operationen, nämlich die Multiplikation \cdot , die Faltung $*$ und der Absolutbetrag nötig sind.

Von den Funktionen ist das Zeitsignal x gegeben und die Chirp-Funktionen werden im nächsten Abschnitt betrachtet.

Von den Operationen ist die Realisation der Multiplikation und des Absolutbetrages (in MATLAB) sehr einfach. Die Faltung bereitet jedoch gewisse Schwierigkeiten.

Die Faltung zweier Funktionen ist in Gleichung (17) definiert. Für zwei Zeitsignale x und y gilt damit für $t \in \mathbb{R}$:

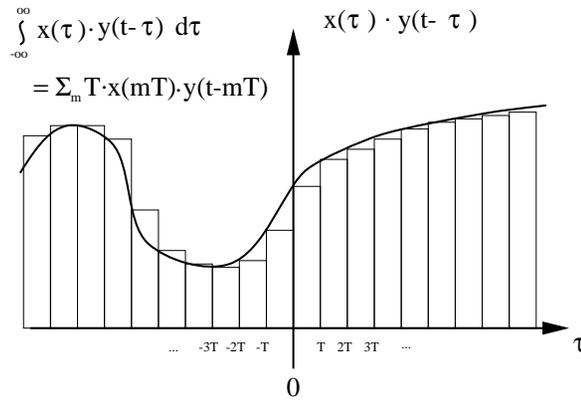


Abbildung 10: Zusammenhang zwischen kontinuierlicher und diskreter Faltung

$$x * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t - \tau) d\tau \quad (40)$$

Sind diese Zeitsignale x und y zeitdiskret durch X und Y mit

$$X(n) := x(n \cdot T) \quad \text{und} \quad Y(n) := y(n \cdot T) \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (41)$$

gegeben (T ist dabei eine feste positive reelle Zahl, das sogenannte *Abtastintervall*), so gilt für $t = n \cdot T$:

$$x * y(t) \approx T \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(m) \cdot Y(n - m) \quad (42)$$

Die Approximation erhält man, indem man in der Gleichung (40) für x und y geschickt gewählte Treppenfunktionen benutzt. Die Abbildung (10) verdeutlicht den Zusammenhang. Die Summe auf der rechten Seite ist per Definition die *diskrete Faltung* $X * Y(n)$. Somit gewinnt man also:

$$x * y(t) \approx T \cdot X * Y(n) \quad (t = n \cdot T) \quad (43)$$

Ferner sei bemerkt, daß man es in Gleichung (42) mit endlichen Summen zu tun hat, falls die zeitkontinuierlichen Signale x und y auf Intervalle beschränkt werden.

Es ist natürlich recht lästig, daß in Gleichung (43) keine Gleichheit, sondern nur ungefähre Gleichheit gilt. Erfüllen die Zeit-Frequenz-Darstellungen von x und y jedoch die Abtastbedingung

$$|f| < \frac{1}{2 \cdot T} \quad (44)$$

so kann gezeigt werden, daß hier exakte Gleichheit gilt¹⁰. Also:

$$x * y(t) = T \cdot X * Y(n) \quad (t = n \cdot T) \quad (45)$$

Die kontinuierliche Faltung ist damit für Signale, die die Abtastbedingung (44) erfüllen, auf die diskrete Faltung zurückgeführt. Leider ist in MATLAB die diskrete Faltung eine langsame Standardfunktion. Aber mit einem Trick kann die (diskrete) Faltung auf die (diskrete) Fourier-Transformation zurückgeführt werden (und in MATLAB steht eine schnelle Fourier-Transformation zur Verfügung). Es gilt nämlich (vergleiche etwa Bauer [2]):

$$\widehat{X * Y} = \widehat{X} \cdot \widehat{Y} \quad (46)$$

Die inverse Fourier-Transformierte von $\widehat{X} \cdot \widehat{Y}$ liefert dann also die diskrete Faltung $X * Y$. Damit ist man in der Lage eine schnelle MATLAB-Funktion für die stetige Faltung zu schreiben:

```
function erg=faltung(X, Y, T)
%
% Autor: D. Prescher,
%         Studienarbeit bei W. Wokurek
% Version: 06.06.1995
%
% Programmbeschreibung:
%   stetige Faltung
%   X, Y   diskrete Signale
%           "über dem Intervall [0, (N-1)*T]
%   T     Abtastintervall
%   erg   Ergebnis der stetigen Faltung
%           "über dem Intervall [0, (N-1)*T]
%
N= length(X); pad= 2*N;
erg=T*ifft( fft(X, pad).* fft(Y, pad), pad);
erg=erg(1:1:N);
return
```

¹⁰Diese Bedingung ist eher im Zusammenhang von kontinuierlicher und diskreter Fourier-Transformation bekannt, siehe etwa Wokurek [5]. Da aber Faltung und Fourier-Transformation dualen Charakter haben, kann man die Abtastbedingung auch für obigen Zweck fordern.

Zum Programm seien noch zwei kleine Anmerkungen gestattet. Erstens: Die Variable *pad* sorgt dafür, daß MATLAB nicht die periodische Fourier-Transformation *fft* benutzt (ebenso bei der inversen Fourier-Transformation *ifft*). Zweitens: Die Faltung ergibt eventuell ein Signal, welches doppelt so lang ist, wie die diskreten Ausgangs-Signale *X* und *Y*. Es ist also noch nötig das interessantere Teilstück herauszugreifen. Dies geschieht in der vorletzten Programmzeile.

5.2 Die Funktion *chirp*

Es wird nun eine MATLAB-Funktion *chirp* vorgestellt, welche es gestattet *chirp* $\frac{\cos(\theta)-1}{\sin\theta}$ und *chirp* $\frac{1}{\sin\theta}$ zu berechnen.

Gleichung (36) zeigt, daß hierbei darauf zu achten ist, daß das Ergebnis auch bei einer Faltung einzusetzen ist, d.h. das Ergebnis sollte der Abtastbedingung (44) genügen. Als Zeit-Frequenz-Darstellung eines Chirps kann hier die Wigner-Darstellung herangezogen werden. Das Lemma über die Wigner-Darstellung eines Chirps *chirp* α besagt, daß:

$$f = \alpha \cdot t$$

Mit der Abtastbedingung somit:

$$|\alpha \cdot t| < \frac{1}{2 \cdot T}$$

D.h.:

$$t < \frac{1}{2 \cdot |\alpha| \cdot T}$$

Nun wird diese Bedingung nicht immer erfüllt sein. Für große α kann der Zeitbereich, in dem die Abtastbedingung erfüllt wird, recht klein werden. Grundsätzlich kann man dieser Wirkung zwar entgegen wirken, indem man das T sehr klein wählt. Doch hat dies wiederum einen negativen Effekt auf die Berechnung der *fft* und *ifft*. Man ist also in einem gewissen Dilemma.

In dieser Arbeit wurde das Problem so gelöst, daß der Anwender zwischen einem Chirp und einem sogenannten *zeitbeschränkten Chirp* wählen kann, der nur für Zeitbereiche definiert ist, die der Abtastbedingung genügen. Die Abbildung 11 zeigt einen *zeitbeschränkten Chirp*.

Die konkrete Implementierung sieht so aus:

```
function erg=chirp(alpha, N, T, time_windowed)
%
% Autor: D. Prescher
%      Studienarbeit bei W. Wokurek, IMS
% Version: 07.06.1995
```

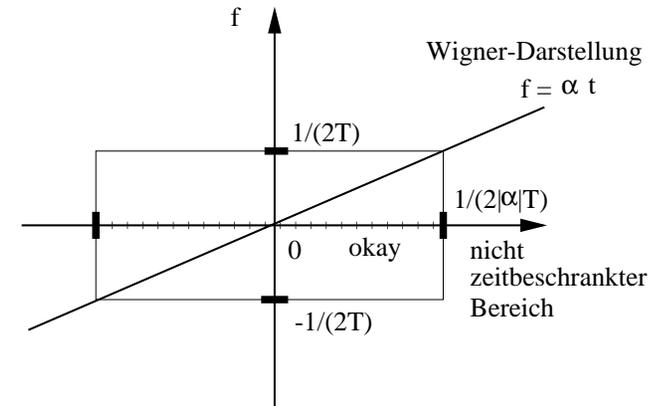


Abbildung 11: Der zeitbeschränkte Chirp

```
% Programmbeschreibung
%   diskreter Chirp
%   "über dem Intervall [0, (N-1)*T]
%   N=           Anzahl St"utzpunkte
%   T=           Abtastintervall
%   time_windowed= 0|1  ohne/mit Ber"ucksichtigung
%                   der Abtastbedingung
%
t= T*(0:(N-1));
erg=exp(pi*i*alpha*t.*t);
if time_windowed==1
    t_grenz= 1/(2*T*abs(alpha)); % Abtastbedingung
    okay=(t<=t_grenz); % okay= Vektor aus 1|0
    erg=okay.*erg; % Einschr"ankung auf okay
end
return
```

5.3 Die Funktion *wp*

Die Implementation der Wigner-Projektion ist nun recht einfach:

```
function erg=wp(theta, x, T, time_windowed)
%
```

```

% Autor: D. Prescher,
% Studienarbeit bei W. Wokurek, IMS
% Version: 07.06.95
% Programmbeschreibung:
% Wigner-Projektion
% x diskretes Signal
% "uber dem Intervall [0, (N-1)*T]
% T Abtastintervall
% theta orientierter Winkel
% aus dem Intervall (-pi, pi)
% time_windowed= 0|1 ohne|mit Ber"ucksichtigung
% der Filtering-Abtastbedingung
% erg theta-Wigner-Projektion
% "uber dem Intervall [0, (N-1)*T]
%
SIN= sin(theta);
if ~ SIN == 0
%----- Anzahl Signalpunkte:
N= length(x);
%----- Analyse der Drehung um theta:
alpha= (cos(theta)-1)/SIN;
beta= SIN;
%----- Chirp-Modulation:
not_time_windowed=0;
CHIRP= chirp(alpha, N, T, not_time_windowed);
x= x.* CHIRP;
%----- Chirp-Filtering:
CHIRP= chirp(1/beta, N, T, time_windowed);
x= faltung(x, CHIRP, T);
end
%----- theta-Projektion als 0-Projektion:
erg= abs(x).^2;
return

```

Es sei bemerkt, daß unabhängig davon, ob der Anwender einen zeitbeschränkten Chirp für die Faltung wählt, der Chirp für die Modulation nicht zeitbeschränkt ist. Für die Modulation an sich ist nämlich keine Abtastbedingung nötig. Das modulierte Zeitsignal geht zwar wieder in die Faltung ein, doch könnte es sein, daß das modulierte Signal der Abtastbedingung genügt, ohne daß der modulierende Chirp dies tut ...

5.4 Ergebnisse zur implementierten Wigner-Projektion

Es wurden vier Wigner-Projektionen erstellt:

- *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$, $\vartheta = 0.10$
- *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$, $\vartheta = 0.10$, Verwendung eines zeitbeschränkten Chirps
- *sin* auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, $N = 1024$
- *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$, $N = 2048$, Verwendung eines zeitbeschränkten Chirps

Die Ergebnisse werden nun im einzelnen beschrieben.

Die erste Serie von Ergebnissen zeigt die Wigner-Projektion des Signals *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$ für $\vartheta = 0.10$. Es wurde kein zeitbeschränkter Chirp verwandt. Die Anzahl Abtastwerte betragen: $N = 16384, 8192, 4096, 2048, 1024, 512$. Die Ergebnisse sind nicht stabil: Die Amplituden verändern sich sehr stark, auch die Form der Kurven verändert sich. Für steigendes N scheint sich jedoch die wahre Gestalt zu zeigen: eine gleichmäßige Schwingung, die einen immer größeren Zeitbereich überdeckt.

Die zweite Serie von Ergebnissen zeigt die Wigner-Projektion des Signals *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$ für $\vartheta = 0.10$. Es wurde ein zeitbeschränkter Chirp verwandt. Die Anzahl Abtastwerte betragen: $N = 4096, 2048, 1024, 512$. Die Ergebnisse sind relativ stabil: Die Amplituden verändern sich nicht allzu sehr stark, auch die Form der Kurven bleibt unverändert. Alle Kurven stimmen relativ genau mit $N=16384$ der ersten Serie überein.

Die dritte Serie von Ergebnissen zeigt die Wigner-Projektion des Signals *sin* auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ für $N = 1024$. Es wurde kein zeitbeschränkter Chirp verwandt, da ein genügend kleines $T = 0.00614$ zur Verfügung stand. Die Winkel betragen: $\vartheta = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80$. Interessantes Ergebnis: Für $\vartheta = 0.10$ gibt es im Zeitbereich $[0, 2\pi]$ gute Übereinstimmung mit allen Bildern der ersten und zweiten Serie.

Die vierte Serie von Ergebnissen zeigt die Wigner-Projektion des Signals *sin* auf dem Intervall $[0, 12\pi]$ für $N = 2048$. Wegen der guten Ergebnisse der zweiten Serie wurde ein zeitbeschränkter Chirp verwandt. Die Winkel betragen: $\vartheta = 0.10, 0.20, 0.30, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80$. Diese Serie dient zur Darstellung der Wigner-Projektion des genannten Signals.

Literatur

- [1] F. Erwe: *Differential- und Integralrechnung, Band 2: Integralrechnung*, BI, 1962
- [2] H. Bauer: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*, de Gruyter, 1978
- [3] G. Fischer: *Lineare Algebra*, Vieweg, 1980
- [4] T. Claasen, W. Mecklenbräucker: *The Wigner Distribution - a Tool for Time-Frequency Signal Analysis*, Philips J. Res. 35, pp 217-250, 276-300, 372-389, 1980
- [5] W. Wokurek: *Darstellung und Untersuchung von Sprachsignalen mit Wigner-Verteilung und Spektrogramm*, Diplomarbeit, Technische Universität Wien, 1986
- [6] W. Wokurek, F. Hlawatsch, G. Kubin: *Hochauflösende Zeit-Frequenz-Analyse von Sprachsignalen*, 13. Gemeinschaftstagung der Deutschen Arbeitsgemeinschaft für Akustik: DAGA87, Aachen, BRD, S. 633-636
- [7] A. C. Kak, M. Slaney: *Principles of Computerized Tomographic Imaging*, IEEE-Press, 1987