Bemerkung: Das mit Schreibmaschine, Lineal und Zeichenstift erstellte Orginal dieses Postscripts stammt aus einer Zeit, in der die Grossrechenanlagen noch mit Lochkarten gefüttert wurden...

dp, Mai 2000

Mehrdimensionale subadditive Prozesse

Diplomarbeit

vorgelegt von

Detlef Prescher

aus

Sudheim

angefertigt

im Institut für stochastische Mathematik

der Georg-August-Universität zu Göttingen

1986

Für meine Eltern

Inhalt

	Seite
I.Stochastische mehrdimensionale subadditive Prozesse	
1.Einführung	4
2.Der Kingman'sche Zerlegungssatz	17
3.Shifts	27
II.Mehrdimensionale subadditive Prozesse bezüglich markovscher Operatoren	
4.Einführung	33
5.Die exakte Dominante	39
Literatur	53

I.Stochastische mehrdimensionale subadditive Prozesse

1.Einführung

Zum erstenmal traten subadditive Prozesse - allerdings noch nicht in ihrer endgültigen Gestalt - in einer Arbeit von J.M.Hammersley und J.A.D.Welsh [1965] auf.
Eine ausführliche Darstellung der Eigenschaften und Anwendungsmöglichkeiten der subadditiven Prozesse gab J.F.C.Kingman [1973].
Einen kurzen Überblick bietet die folgende Zusammenfassung wichtiger Ergebnisse.

Sei $\mathbb{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen ,einschließlich 0 ,d.h.

$$\mathbb{N} = \{ 0,1,2,3,\dots \}$$,und sei

$$\mathbb{R} := \{ (s,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \mid s < t \}$$.

Nach Kingman's Definition heißt eine Familie von reellen,integrierbaren Zufallsvariablen

$$x = (x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathbb{R})$$

auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ <u>subadditiver Prozess</u>,falls die folgenden drei Axiome erfüllt sind :

(S1) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}$ und $(t,u) \in \mathbb{R}$ gilt :

$$x_{s,u} \leq x_{s,t} + x_{t,u} \quad f.s.$$.

(S2) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Prozesses

$(x_{s+1,t+1} \mid (s,t) \in \mathbb{R})$

stimmt mit der von x überein.

(S3) $$\inf_{\substack{t \in \mathbb{N} \\ t \geq 1}} E(t^{-1} x_{0,t}) > -\infty$$.

x heißt <u>superadditiver Prozess</u>,wenn $-x$ subadditiver Prozess ist.
x heißt <u>additiver Prozess</u>,wenn x beide Eigenschaften hat.
Eines der ältesten Ergebnisse,welches noch von J.M.Hammersley und J.A.D.Welsh stammt,ist :

$$\gamma(x) := \lim_{t\to\infty} E(t^{-1} x_{0,t}) \quad \text{existiert in } \overline{\mathbb{R}} \text{ und ist endlich.}$$

J.M.Hammersley und J.A.D.Welsh nannten $\gamma(x)$ Zeitkonstante des Prozesses x.
Die Zeitkonstante ist eine interessante Größe,wie eines der wichtigsten Ergebnisse in der Theorie subadditiver Prozesse,welches auf J.F.C.Kingman [1968] zurückzuführen ist,zeigt :

$\lim_{t\to\infty} t^{-1} x_{0,t}$ existiert f.s. und in L_1 ,und es gilt

$$E(\lim_{t\to\infty} t^{-1} x_{0,t}) = \gamma(x) \quad .$$

Kingman bewies die f.s.-Konvergenz mit einem Zerlegungssatz :

Sei x subadditiv.Dann gibt es eine Darstellung
$x = y + z$ f.s. ,
wobei y additiv und z subadditiv mit $z \geq 0$, $\gamma(z) = 0$
ist.

Wie einige andere Anwendungen zeigen,hat dieser Satz eine eigenständige Bedeutung.Es darf aufgrund neuerer Ergebnisse sogar vermutet werden, daß der „Kingman'sche Zerlegungssatz" tiefer ist,als der „Kingman'sche Konvergenzsatz".
Seine Verallgemeinerung ist das Ziel der vorliegenden Arbeit.
Hier,im ersten Teil,werden stochastische Prozesse

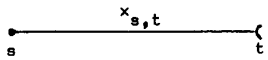
$$(x_{s,t} \mid (s,t) \in \dots)$$

betrachtet,bei denen s und t aus mehreren Parametern bestehen dürfen.
Der eindimensionale Begriff „subadditiv" wird anhand einer Idee von R.T.Smythe [1976] geometrisch zu dem mehrdimensionalen Begriff „stark subadditiv" erweitert.
Mit Hilfe eines tiefen Satzes von J.Komlós [1967] gelingt dann die Kingman'sche Zerlegung.Der Beweis ist i.W. eine Kopie des Beweises,den Smythe schon für Dimension 2 gab.
Im zweiten Teil werden „mehrdimensionale subadditive Prozesse bezüglich markov'scher Operatoren" betrachtet.
Es wird der Versuch unternommen,einAnalogon zum Kingman'schen Zerlegungssatz mit elementaren Hilfsmitteln zu beweisen,was jedoch nur in Spezialfällen, insbesondere unter Invertierbarkeitsannahmen gelingt.
Immerhin wird es aber möglich sein,die Ergebnisse aus dem ersten Teil

auch ohne den Satz von Komlos zu zeigen.

Am Ende dieses Überblicks möchte ich Professor Krengel für die hervorragende Betreuung meiner Diplomarbeit danken.
Stets fand er Zeit meine Fragen zu beantworten und mir zu helfen eine „klare Linie" zu halten.

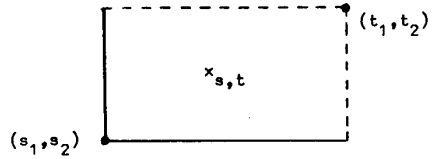
Nach den obigen Erläuterungen ergibt sich nun das Problem,für den mehr-
-dimensionalen Fall ein geometrisches Analogon zur Kingman'schen Definition
zu finden.
Der Schlüsselschritt ist,daß man sich im eindimensionalen Fall vorstellt,
daß $x_{s,t}$ ein dem rechtsoffenen Intervall $[s,t[$ zugewiesener Wert ist.



Entsprechend ist $x_{s,t}$ im zweidimensionalen Fall ein dem „rechtsoffenen"
Rechteck

$$[s,t[:= \{ (v_1,v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid s_1 \leq v_1 < t_1 \ , \ s_2 \leq v_2 < t_2 \}$$

zugewiesener Wert.



U.s.w. ... Für Dimension d kann

$$\mathbb{R}(d) := \{ (s,t) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \mid s_i < t_i \quad \text{für alle} \quad i = 1,\dots,d \}$$

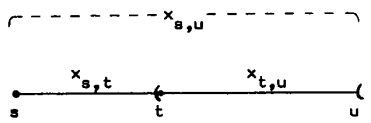
als die Menge der <u>rechtsoffenen Rechtecke</u>

$$[s,t[:= \{ v \in \mathbb{R}^d \mid s_i \leq v_i < t_i \quad \text{für alle} \quad i = 1,\dots,d \}$$

angesehen werden.
Infolgedessen werden ab jetzt diejenigen stochastischen Prozesse betrachtet,
die durch $\mathbb{R}(d)$ indiziert sind,d.h.:

$$x = (x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathbb{R}(d)) \quad .$$

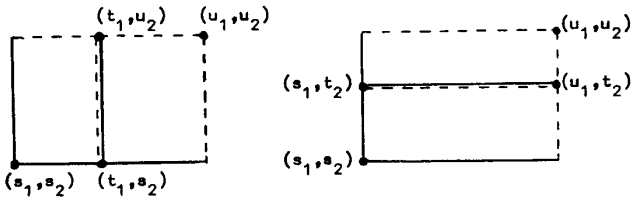
Nun ist noch zu klären,welche zu (S1) - (S3) geometrisch analogen Eigenschaften
diese Prozesse erhalten sollen.
Kehrt man zum eindimensionalen Fall zurück,besagt (S1) ,daß bei einer
Zerlegung eines rechtsoffenen Intervalls in zwei rechtsoffene Intervalle,
der zum unzerlegten Intervall gehörende x-Wert kleinergleich der Summe
der zur Zerlegung gehörenden x-Werte ist.



Indem man zu den rechtsoffenen Rechtecken übergeht,ist diese Forderung
für jede beliebige Dimension möglich.
Die folgende Bedingung erscheint also kanonisch :

(1.1) Für alle $(s,u) \in \mathbb{R}(d)$ und für jede feste Koordinate $i \in \{1,\dots,d\}$,
sowie für jede natürliche Unterteilung $s_i < t_i < u_i$ in dieser
Koordinate,gilt
$x_{s,u} \overset{f.s.}{\leq} x_{s,(u_1,\dots,t_i,\dots,u_d)} + x_{(s_1,\dots,t_i,\dots,s_d),u}$.

<u>d = 2</u> :



Das Axiom (S2) besagt,daß der um eine Einheit nach rechts verschobene
Prozess $(x_{s+1,t+1} \mid (s,t) \in \mathbb{R})$ dieselbe Wahrscheinlichkeitsverteilung
wie der unverschobene Prozess hat.
Im mehrdimensionalen Fall kann man den Prozess natürlich in mehrere Richtungen
verschieben.Insbesondere bieten sich die Richtungen entlang der Einheits-
-vektoren $e_1,\dots,e_d$ an :

(1.2) Für jede Koordinate $i \in \{1,\dots,d\}$ stimmt die Wahrscheinlichkeits-
-verteilung von
$(x_{s+e_i,t+e_i} \mid (s,t) \in \mathbb{R}(d))$
mit der von x überein.

Axiom (S3) schließlich,ist eine Bedingung an die Größen $t^{-1}x_{0,t}$ .Da
$x_{0,t}$ der dem Intervall $[0,t[$ zugewiesene Wert,und t der geometrische

Inhalt dieses Intervalls ist,kann $t^{-1}x_{0,t}$ als eine Art „Dichte" interpretiert werden.
Im mehrdimensionalen Fall ist $|t| := t_1 \cdots t_d$ der geometrische Inhalt des Rechtecks $[0,t[$,und damit $|t|^{-1}x_{0,t}$ die „Dichte.
Als geeignete Forderung erscheint also :

$$(1.3) \qquad \inf_{\substack{t \in \mathbb{N}^d \\ |t| \geq 1}} E(|t|^{-1} x_{0,t}) > -\infty$$

1.1 Definition
Eine familie von reellen integrierbaren Zufallsvariablen

$$x = (x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathcal{R}(d))$$

auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega , \mathcal{A} , P)$,welche die Eigenschaften (1.1),(1.2),(1.3) besitzt,heißt (stochastischer d-dimensionaler) subadditiver Prozess.

Das folgende Beispiel geht auf J.M.Hammersley und J.A.D.Welsh [1965] zurück.

1.2 Beispiel
Im $\mathbb{R}^2$ seien auf einer zufälligen,jedoch stationären Weise Geraden gegeben.
Z.B. seien ihre Abstände zum Ursprung die Punkte eines homogenen Poisson-prozesses auf $\mathbb{R}^+$ und ihre Richtungen unabhängig gleichverteilt in $[0,2\pi[$.
Die Geraden erzeugen konvexe Polygone.
Für $(s,t) \in \mathcal{R}(d)$ sei $x_{s,t}$ die Anzahl der Polygone einer gewissen Klasse (etwa die Dreiecke),welche das Rechteck $[s,t[$ schneiden.
Dann ist x ein 2-dimensionaler subadditiver Prozess.

1.3 Beispiel
Ist in der obigen Situation $x_{s,t}$ die Anzahl aller Geraden ,welche $[s,t[$ schneiden,so liegt ebenfalls ein 2-dimensionaler Prozess vor.

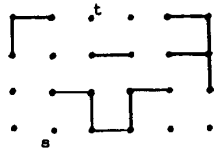
Das nächste Beispiel findet sich in der Arbeit von J.M.Hammersley [1974].Es stammt aus einem Teilgebiet der statistischen Physik,welche das Gleichgewicht zwischen Flüssigkeit und Dampf untersucht.

1.4 Beispiel
Im $\mathbb{R}^3$ seien auf einer zufälligen,jedoch stationären Weise Kugeln mit festem Radius $r > 0$ gegeben.

Für $(s,t) \in \mathcal{R}(d)$ sei $x_{s,t}$ das Volumen der Vereinigung aller Kugeln, deren Inneres ganz in $[s,t[$ liegt.
Dann ist $-x$ ein 3-dimensionaler subadditiver Prozess.

Das letzte Beispiel ist der Clusterprozess von G.R.Grimmet.(vgl. U.Krengel [1985,Seite 202] ,X.X.Nguyen [1979])

1.5 Beispiel
Für jeden Punkt $v \in \mathbb{N}^d$ sei Y_v eine Zufallsvariable,die den Wert 1 mit der festen Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ annimmt.
Zwei Punkte $u , v \in \mathbb{N}^d$ mit euklidischen Abstand 1 werden miteinander verbunden,wenn $Y_u = Y_v = 1$ ist.
Auf diese Weise entstehen Cluster (Haufen) aus miteinander verbundenen Punkten



Schränkt man sich auf ein rechtsoffenes Rechteck $[s,t[$ ein,können Cluster entstehen,die mit einer Kante ohne zugehörigen Endpunkt enden.In der obigen Skizze etwa

Ist $x_{s,t}$ die Anzahl der Cluster in $[s,t[$,so ist x ein d-dimensionaler subadditiver Prozess.

Weitere Beispiele mehrdimensionaler subadditiver Prozesse finden sich in den Arbeiten von J.M.Hammersley [1974] ,X.X.Nguyen [1979] und R.T.Smythe [1976] .
Diese Autoren benutzen zum Teil andere Definitionen.Insbesondere basieren die Resultate von X.X.Nguyen und R.T.Smythe auf stärkeren Forderungen als Bedingung (1.1) .Auch in dieser Arbeit wird die Kingman'sche Zerlegung nicht in voller Allgemeinheit bewiesen.
Im Folgenden wird anhand einer Idee von R.T.Smythe ein weiteres geometrisches Analogon zu (S1) entwickelt,welches zusammen mit Bedingung (1.1) die notwendige Stärke besitzt.
Diesmal wird von folgender Umformulierung des ersten Kingman'schen Axiom ausgegangen :

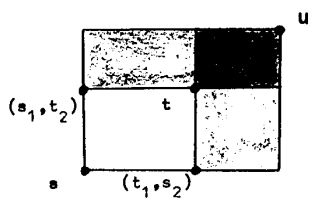
(S1) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}$ und $(t,u) \in \mathbb{R}$ gilt

$$x_{s,u} - x_{t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \qquad .$$

Im zweidimensionalen Fall entspricht dem :

(1.4) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}(2)$ und $(t,u) \in \mathbb{R}(2)$ gilt

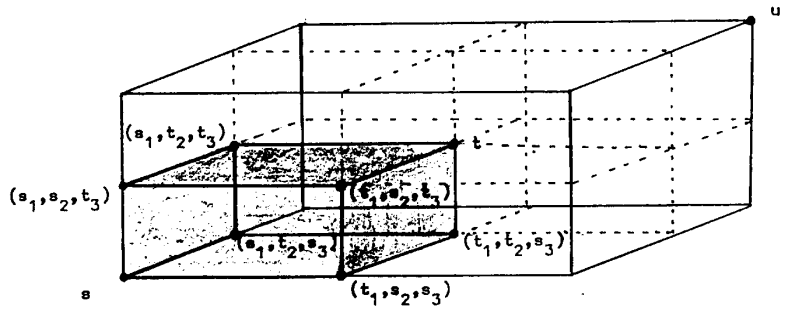
$$x_{s,u} - x_{(s_1,t_2),u} - x_{(t_1,s_2),u} + x_{t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \qquad .$$



Mit etwas Mühe kann man sich auch noch den dreidimensionalen Fall vorstellen :

(1.5) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}(3)$ und $(t,u) \in \mathbb{R}(3)$ gilt

$$x_{s,u} - x_{(s_1,s_2,t_3),u} - x_{(s_1,t_2,s_3),u} - x_{(t_1,s_2,s_3),u}$$
$$+ x_{(s_1,t_2,t_3),u} + x_{(t_1,s_2,t_3),u} + x_{(t_1,t_2,s_3),u} - x_{t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s..}$$



Die Frage ist nun,wie das im allgemeinen mehrdimensionalen Fall aussieht. Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie ist für mehrdimensionale Verteilungs--funktionen der folgende Operator bekannt

(vgl. z.B. H.Richter [1956,S.30ff.]) :

1.6 Definition

Für $f: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ und $s,t \in \mathbb{R}^d$ heißt

$$\Delta_s^t f := \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} f(s \overset{v}{\circ} t)$$

d-dimensionale Differenz von t und s bezüglich f ;dabei ist $s \overset{v}{\circ} t \in \mathbb{R}^d$ mit i-ter Koordinate

$$\left\{ \begin{matrix} s_i & \text{falls} & v_i = 1 \\ t_i & \text{falls} & v_i = 2 \end{matrix} \right\} \qquad .$$

Mit Hilfe der d-dimensionalen Differenz lassen sich (1.4) und (1.5) leicht aufschreiben :

(1.6) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}(d)$ und $(t,u) \in \mathbb{R}(d)$ gilt

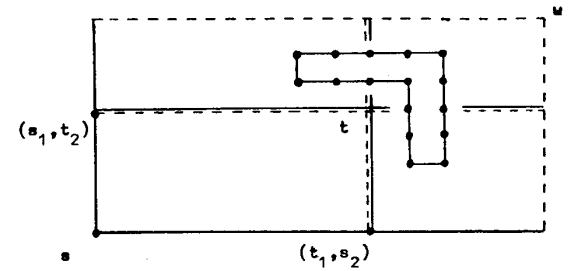
$$(-1)^d \Delta_s^t x_{\cdot,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \qquad .$$

Diese Definition ist auch für die restlichen Dimensionen $(d>3)$ möglich.

1.7 Definition

Ein subadditiver Prozess $x = (x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathbb{R}(d))$,der zusätzlich die Eigenschaft (1.6) besitzt,heißt (stochastischer d-dimensionaler) stark subadditiver Prozess.

Die Beispiele 1.2 , 1.3 und 1.4 besitzen die „starke" Eigenschaft. Der Clusterprozess von G.R.Grimmet ist nicht stark subadditiv.Siehe etwa d = 2 :



Obwohl die (stark) subadditiven Prozesse $(x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathbb{R}(d))$ in mancher Hinsicht die natürliche Erweiterung des eindimensionalen Falles darstellen, erscheint es aus beweistechnischen Gründen zweckmässiger, stochastische Prozesse zu betrachten, die mit der $\mathbb{R}(d)$ umfassenden Menge

$$\mathbb{R}'(d) := \{ (s,t) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \mid s_i \leq t_i \text{ für alle } i=1,..,d \}$$
$$=: \{ s \leq t \}$$

indiziert sind, und folgende Bedingung erfüllen :

(1.7) Für alle $s \leq t$ mit $(s,t) \notin \mathbb{R}(d)$, d.h. mit $s_j = t_j$ in einer Koordinate $j \in \{1,..,d\}$, gilt
$x_{s,t} = 0$ f.s. •

1.8 Definition
Eine Familie von reellen integrierbaren Zufallsvariablen
$x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$
auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, welche die Eigenschaften (1.7) ,

(1.8) Für alle $s \leq u$ und für jede feste Koordinate $i \in \{1,..,d\}$, sowie für jede natürliche Unterteilung $s_i \leq t_i \leq u_i$ in dieser Koordinate, gilt
$x_{s,u} \leq x_{s,(u_1,..,t_i,..,u_d)} + x_{(s_1,..,t_i,..,s_d),u}$ f.s. ,

(1.9) Für jede Koordinate $i \in \{1,..,d\}$ stimmt die Wahrscheinlichkeits-verteilung von $(x_{s+e_i,t+e_i} \mid s \leq t)$ mit der von x überein,

und (1.3) erfüllt, heißt (stochastischer d-dimensionaler) subadditiver Prozess.

1.9 Definition
Ein subadditiver Prozess $(x_{s,t} \mid s \leq t)$, der zusätzlich die Eigenschaft

(1.10) Für alle $s \leq t \leq u$ gilt
$(-1)^d \Delta_s^t x_{\cdot,u} \leq x_{s,t}$ f.s.

besitzt, heißt (stochastischer d-dimensionaler) stark subadditiver Prozess.
x heißt (stark) superadditiv, falls $-x$ (stark) subadditiv ist.
x heißt additiv, falls x sub- und superadditiv ist.

Die Beispiele 1.2 , 1.3 und 1.4 besitzen, wenn man sie durch (1.7) erweitert, auch diese „starke" Eigenschaft.

1.10 Bemerkung
In Definition 1.9 kann man auf (1.8) verzichten, denn es gilt :

$$(1.7) \text{ , } (1.10) \Rightarrow (1.8) \quad \bullet$$

Seien zum Beweis s,u,i,t_i wie in (1.8) gewählt.
Setzt man $t := (u_1,..,t_i,..,u_d)$, so gilt $s \leq t \leq u$, d.h. nach (1.10) :

$$(-1)^d \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+..+v_d} \cdot x_{s \overset{\circ}{v} t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad \bullet$$

Für alle v mit $v_j = 2$ in einer Koordinate $\{1,..,d\} \setminus \{i\}$, stimmen $s \overset{\circ}{v} t$ und u in dieser Koordinate überein, d.h. es gilt wegen (1.7) :

$$x_{s \overset{\circ}{v} t,u} = 0 \quad \text{f.s.} \quad \bullet$$

Die obige Summe reduziert sich daher auf die Summanden mit $v=\vec{1} := (1,..,1)$ und $v=(1,..,2,..,1)$, mit der 2 in der i-ten Koordinate :

$$(-1)^d ((-1)^d x_{s,u} - (-1)^d x_{(s_1,..,t_i,..,s_d),u}) \leq x_{s,(u_1,..,t_i,..,u_d)}$$

Dies ist die Behauptung. ■

1.11 Bemerkung
Bezeichnet man für $x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$ den eingeschränkten Prozess $(x_{s,t} \mid (s,t) \in \mathbb{R}(d))$ mit x' , so gilt

x subadditiv $\Leftrightarrow$ x' subadditiv.
x stark subadditiv $\Rightarrow$ x' stark subadditiv,
sowie für $d=2$ auch die Umkehrung.

Die Hinrichtungen sind trivial. Für die Rückrichtungen werden die folgenden Implikationen gezeigt :

(1.7) , (1.1) $\Rightarrow$ (1.8) , und für $d=2$:
(1.7) , (1.1) , (1.6) $\Rightarrow$ (1.10) •

Seien dazu zunächst s,u,i,t_i wie in (1.8) gewählt. Zu zeigen ist dann :

$$x_{s,u} \leq x_{s,(u_1,\ldots,t_i,\ldots,u_d)} + x_{(s_1,\ldots,t_i,\ldots,s_d),u} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Ist $s_j = u_j$ für eine Koordinate $j \in \{1,\ldots,d\}$,so stimmen auch s und $(u_1,\ldots,t_i,\ldots,u_d)$,sowie $(s_1,\ldots,t_i,\ldots,s_d)$ und u in der j-ten Koordinate überein (Im Fall $j=i$ wegen $s_i = t_i = u_i$).Nach (1.7) ist also nichts zu beweisen.Ist $s_i = t_i$ oder $t_i = u_i$,so reduziert sich die obige Ungleichung,wegen (1.7) ,zu $x_{s,u} \leq x_{s,u}$.

Sei also $(s,u) \in \mathbb{R}(d)$ und $s_i < t_i < u_i$.

(1.1) liefert das Gewünschte. ■

Sei nun $d=2$ und $(s_1,s_2) \leq (t_1,t_2) \leq (u_1,u_2)$ .Zu zeigen ist :

$$x_{s,u} - x_{(s_1,t_2),u} - x_{(t_1,s_2),u} + x_{t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Ist $s_j = t_j$ für ein $j \in \{1,2\}$,OE $s_1 = t_1$,so wird dies zu :

$$0 = x_{s,u} - x_{t,u} - x_{s,u} + x_{t,u} \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Dies gilt wegen (1.7) .

Ist $t_j = u_j$ für ein $j \in \{1,2\}$,OE $t_1 = u_1$,so wird die obige Ungleichung zu

$$x_{s,u} - x_{(s_1,t_2),u} \leq x_{s,(t_1,u_2)} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Dies gilt wegen (1.8) .

Sei also $(s,t) \in \mathbb{R}(2)$ und $(t,u) \in \mathbb{R}(2)$.

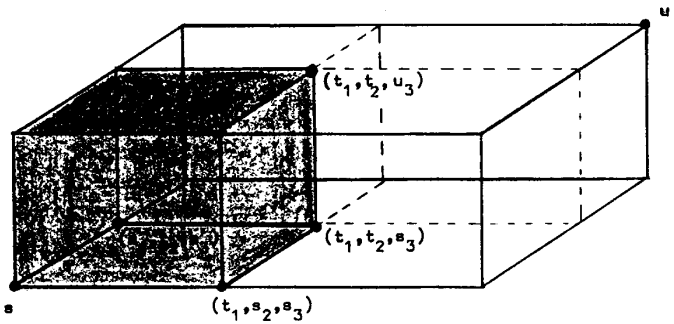
(1.6) liefert das Gewünschte. ■

Für $d = 3$ gilt vermutlich nicht mehr diese Richtung,was bedeuten würde, daß beim Übergang von den,mit $\mathbb{R}(d)$ indizierten,stark subadditiven Prozessen zu den mit $\{s \leq t\}$ indizierten,stark subadditiven Prozessen,ein Verlust an Allgemeinheit in Kauf zu nehmen ist.

Für $d=3$ besagt (1.10) ,wegen (1.7) ,insbesondere :

(1.11) Für alle $(s,u) \in \mathbb{R}(3)$ und für alle t_1 , $t_2 \in \mathbb{N}$ mit $s_1 < t_1 < u_1$ und $s_2 < t_2 < u_2$,gilt :

$$x_{s,u} - x_{(s_1,t_2,s_3),u} - x_{(t_1,s_2,s_3),u} + x_{(t_1,t_2,s_3),u} \leq x_{s,(t_1,t_2,u_3)} \quad \text{f.s.}$$



Da anschaulich,die (1.11) zugrundeliegende Zusammensetzung des Rechtecks $[s,u[$ für einen stark superadditiven, $\mathbb{R}(3)$ - indizierten Prozess unbekannt ist,läßt sich vermutlich (1.11) nicht aus (1.5) und (1.1) herleiten. Genaueres läßt sich aber wohl erst mit einem Beispiel zeigen.

2.Der Kingman'sche Zerlegungssatz

Zunächst wird gezeigt,daß auch mehrdimensionale subadditive Prozesse eine Zeitkonstante besitzen.Dazu werden einige Vorbereitungen getroffen :

Sei $\{t \in \mathbb{Z}^d \mid t \geq 0\}$ kurz mit $\{t \geq 0\}$ bezeichnet.
Eine Familie $(g_t \mid t \geq 0)$ von reellen Zahlen heißt subadditiv ,wenn sie in jeder Koordinate subadditiv ist,d.h.:

(2.1) In jeder Koordinate $i \in \{1,..,d\}$ und für jede feste Wahl von $u_1,..,u_{i-1},u_{i+1},..,u_d \in \mathbb{N}$,gilt für alle $a,b \in \mathbb{N}$:

$$g_{(u_1,..,a+b,..,u_d)} \leq g_{(u_1,..,a,..,u_d)} + g_{(u_1,..,b,..,u_d)} \quad .$$

Schreibt man $t \to \infty$,falls $t_i \to \infty$ für alle $i=1,..,d$ (unabhängig voneinander),so gilt das folgende,im eindimensionalen Fall klassische Ergebnis.

2.1 Satz
Für eine subadditive Familie reeller Zahlen $(g_t \mid t \geq 0)$ gilt :

$\lim_{t\to\infty} |t|^{-1} g_t$ existiert in $\overline{\mathbb{R}}$,und ist gleich $\inf_{\substack{t\in\mathbb{N}^d \\ |t|\geq 1}} |t|^{-1} g_t =: \gamma$.

Beweis
Es wird $\limsup_{t\to\infty} |t|^{-1} g_t \leq \gamma$ gezeigt.
Sei dazu $s \in \mathbb{N}^d$, $|s| \geq 1$, (zunächst) fest gewählt.
Mit koordinatenweiser Addition und Multiplikation kann man dann jedes beliebige $t \in \mathbb{N}^d$ in folgender Weise zerlegen:

$$t = n \cdot s + \delta \quad ,$$

wobei $n = n(t) \in \mathbb{N}^d$ und $\delta = \delta(t) \in \mathbb{N}^d$ mit $0 \leq \delta \leq s - \mathbb{1}$.
Unter sukzessiver Anwendung von (2.1) folgt dann:

$$g_t = g_{n\cdot s+\delta} \leq \sum_{v\in\{1,2\}^d} g_{(n\cdot s)\,\circ_v \delta} \leq \sum_{v\in\{1,2\}^d} |n \circ_v \mathbb{1}| \cdot g_{s\,\circ_v \delta} \quad .$$

Also:

$$\frac{g_t}{|t|} \leq \frac{g_t}{|n|\cdot|s|} \leq \sum_{v\in\{1,2\}^d} \frac{|n \circ_v \mathbb{1}|}{|n|} \cdot \frac{g_{s\,\circ_v \delta}}{|s|} \quad .$$

Für alle $v \in \{1,2\}^d$ und $t \in \mathbb{N}^d$ gilt $g_{s\,\circ_v \delta} \leq \max\{g_u \mid u \leq s\} < \infty$,d.h.

$g_{s\,\circ_v \delta}$ ist für alle $v \in \mathbb{N}^d$ gleichmässig in t beschränkt.

Ferner gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|n \circ_v \mathbb{1}|}{|n|} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{für } v=\mathbb{1} \\ 0 & \text{für } v\neq\mathbb{1} \end{array} \right\} \quad .$$

Es folgt also:

$$\limsup_{t\to\infty} |t|^{-1} g_t \leq |s|^{-1} g_s \quad ,$$

und daher: $\gamma = \inf\{|s|^{-1} g_s \mid s \in \mathbb{N}^d , |s| \geq 1\} \geq \limsup_{t\to\infty} |t|^{-1} g_t$. ■

Der folgende Satz läßt sich nun sehr leicht beweisen.

2.2 Satz
Für einen subadditiven Prozess $x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$ gilt :

$\gamma(x) := \lim_{t\to\infty} |t|^{-1} E(x_{0,t})$ existiert und ist endlich.

Beweis
Setzt man $g_t := E(x_{0,t})$,so ist $(g_t \mid t \geq 0)$ subadditiv.
Seien dazu $i,u_1,..,u_{i-1},u_{i+1},..,u_d,a,b$ wie in (2.1) gewählt.
Setzt man $u_i = a + b$ und $t_i = a$,so ist $0 \leq u$ und $0 \leq t_i \leq u_i$,d.h.
es gilt nach (1.8) :

$$x_{0,u} \leq x_{0,(u_1,..,t_i,..,u_d)} + x_{(0,..,t_i,..,0),u} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Also

$$g_{(u_1,..,a+b,..,u_d)} \leq g_{(u_1,..,a,..,u_d)} + E(x_{(0,..,a,..,0),(u_1,..,a+b,..,u_d)})$$

Aus (1.9) folgt dann das Gewünschte.
Mit Satz 2.1 und (1.3) folgt die Behauptung. ■

Damit stehen nun alle Begriffe zur Verfügung,um den Kingman'schen Zerlegungssatz zu formulieren.

2.3 Satz
Jeder stark subadditive Prozess $x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$ läßt sich auf folgende Weise zerlegen :

$$x = y + z \quad ,$$

wobei y ein additiver Prozess,und $z = (z_{s,t} \mid s \leq t)$ ein stark subadditiver Prozess mit $z \geq 0$ und $\gamma(z)=0$ ist.

Für den Beweis dieses Satzes sind die folgenden Rechenregeln für die d-dimensionale Differenz sehr nützlich.

2.4 Satz

Seien $r , s , t \in \mathbb{N}^d$ und f , g Abbildungen von $\mathbb{N}^d$ nach $\mathbb{R}$, sowie $a_k \in \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}^d$, und $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dann gelten :

(2.2) $\Delta_s^t (\alpha f) = \alpha \cdot \Delta_s^t f \quad , \quad \Delta_s^t (f+g) = \Delta_s^t f + \Delta_s^t g$.

(2.3) $\Delta_s^t f = \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot,t_d) - \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot,s_d)$,

wobei die gestrichenen Vektoren durch Streichung der letzten Koordinate entstehen.

(2.4) $\Delta_s^t f = (-1)^d \Delta_t^s f$.

(2.5) $\Delta_s^t f(r+\cdot) = \Delta_{r+s}^{r+t} f \quad , \quad \Delta_s^t f(r-\cdot) = \Delta_{r-s}^{r-t} f$;

wobei für die zweite Gleichung $r-s , r-t \in \mathbb{N}^d$ vorausgesetzt wird.

Setzt man für $m , n \in \mathbb{N}^d$

$$\sum_{k=n}^{m} := \begin{cases} \sum_{\{k \in \mathbb{N}^d \mid n \le k \le m\}} & \text{falls } n \le m \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} ,$$

so gelten ferner :

(2.6) $\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} f = \Delta_s^t f$ falls $s \le t - \mathbb{1}$.

(2.7) $(-1)^d \Delta_s^t \left(\sum_{k=\cdot}^{u-\mathbb{1}} a_k \right) = \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} a_k$ falls $s \le t \le u$.

Beweis von Satz 2.4

(2.2) ist trivial.

zu (2.3) :

$$\Delta_s^t f := \sum_{v_1,\dots,v_d=1}^{2} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} f(s \overset{\circ}{(v_1,\dots,v_d)} t)$$

$$= \sum_{v_1,\dots,v_{d-1}=1}^{2} \Big((-1)^{v_1+\cdots+v_{d-1}+2} f(s \overset{\circ}{(v_1,\dots,v_{d-1},2)} t) + (-1)^{v_1+\cdots+v_{d-1}+1} f(s \overset{\circ}{(v_1,\dots,v_{d-1},1)} t) \Big)$$

$$= \sum_{v_1,\dots,v_{d-1}=1}^{2} (-1)^{v_1+\cdots+v_{d-1}} f(s' \overset{\circ}{(v_1,\dots,v_{d-1})} t' , t_d)$$

$$- \sum_{v_1,\dots,v_{d-1}=1}^{2} (-1)^{v_1+\cdots+v_{d-1}} f(s' \overset{\circ}{(v_1,\dots,v_{d-1})} t' , s_d)$$

$$= \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot , t_d) - \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot , s_d) .$$

zu (2.4) :

Auf $\{1,2\}^d$ ist die Abbildung $v \longmapsto v^*$ mit

$$v_i^* := \begin{cases} 1 & \text{falls } v_i = 2 \\ 2 & \text{falls } v_i = 1 \end{cases}$$

bijektiv. Daher gilt :

$$\Delta_s^t f = \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1^*+\cdots+v_d^*} f(s \overset{\circ}{v^*} t)$$

$$= \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1^*+\cdots+v_d^*} f(t \overset{\circ}{v} s) .$$

Aus $(-1)^{v_i^*} = - (-1)^{v_i}$ folgt schließlich die Behauptung.

(2.5) ergibt sich sofort aus den für alle $v \in \{1,2\}^d$ geltenden Gleichungen

$$r \pm (s \overset{\circ}{v} t) = (r \pm s) \overset{\circ}{v} (r \pm t) .$$

(2.6) wird durch Induktion über d bewiesen.

Induktionsanfang d=1 : Für $s \le t - 1$ gilt

$$\sum_{k=s}^{t-1} (f(k+1) - f(k)) = f(t) - f(s) .$$

Induktionsschluß d-1 → d : Mit (2.3) erhält man

$$\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} f = \sum_{k'=s'}^{t'-\mathbb{1}'} \sum_{k_d=s_d}^{t_d-1} (\Delta_{k'}^{k'+\mathbb{1}'} f(\cdot,k_d+1) - \Delta_{k'}^{k'+\mathbb{1}'} f(\cdot,k_d))$$

$$= \sum_{k'=s'}^{t'-1'} (\Delta_{k'}^{k'+\mathbb{1}'} f(\cdot,t_d) - \Delta_{k'}^{k'+\mathbb{1}'} f(\cdot,s_d)) .$$

Wegen $s' \leq t' - \mathbb{1}'$,gilt also nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} f = \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot,t_d) - \Delta_{s'}^{t'} f(\cdot,s_d)$$

$$= \Delta_s^t f \qquad \text{(wieder mit (2.3))} \ .$$

(2.7) wird ebenfalls durch Induktion über d gezeigt.

Induktionsanfang d=1 : Für $s \leq t \leq u$ gilt

$$\sum_{k=s}^{u-1} a_k - \sum_{k=t}^{u-1} a_k = \sum_{k=s}^{t-1} a_k$$

(Im Fall s=t oder t=u verschwindet definitionsgemäß $\sum_{k=s}^{t-1} a_k$ oder $\sum_{k=t}^{u-1} a_k$).

Induktionsschluß d-1 → d : Mit (2.3) erhält man

$$(-1)^d \Delta_s^t \Big(\sum_{k=\cdot}^{u-\mathbb{1}} a_k \Big)$$

$$= (-1)^d \Big(\Delta_{s'}^{t'} \sum_{k=(\cdot,t_d)}^{u-\mathbb{1}} a_k - \Delta_{s'}^{t'} \sum_{k=(\cdot,s_d)}^{u-\mathbb{1}} a_k \Big)$$

$$= (-1)^d \Big(\Delta_{s'}^{t'} \sum_{k'=\cdot}^{u'-\mathbb{1}'} \Big(\sum_{k_d=t_d}^{u_d-1} a_k \Big) - \Delta_{s'}^{t'} \sum_{k'=\cdot}^{u'-\mathbb{1}'} \Big(\sum_{k_d=s_d}^{u_d-1} a_k \Big) \Big)$$

Wegen $s' \leq t' \leq u'$,ist dies nach Induktionsvoraussetzung gleich :

$$- \sum_{k'=s'}^{t'-\mathbb{1}'} \Big(\sum_{k_d=t_d}^{u_d-1} a_k \Big) + \sum_{k'=s'}^{t'-\mathbb{1}'} \Big(\sum_{k_d=s_d}^{u_d-1} a_k \Big)$$

$$= \sum_{k'=s'}^{t'-\mathbb{1}'} \Big(\sum_{k_d=s_d}^{u_d-1} a_k - \sum_{k_d=t_d}^{u_d-1} a_k \Big)$$

$$= \sum_{k'=s'}^{t'-\mathbb{1}'} \sum_{k_d=s_d}^{t_d-1} a_k \qquad \text{(wie im Induktionsanfang)}$$

$$= \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} a_k \ . \qquad \blacksquare$$

Der folgende Beweis des Kingman'schen Zerlegungssatzes geht für d=1 auf D.Burkholder [1973] und für d=2 auf R.T.Smythe [1976] zurück.

Beweis von Satz 2.3

Zunächst wird die Existenz einer Familie $(f_k \mid k \in \mathbb{N}^d)$ von Zufallsvariablen gezeigt,welche die folgenden Bedingungen erfüllt :

(2.8) $\quad E(f_0) = \gamma(x)$,

(2.9) Für alle $s \leq t - \mathbb{1}$ gilt $\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k \leq x_{s,t}$ f.s. ,

(2.10) Für jede Koordinate $i \in \{1,..,d\}$ stimmt die Wahrscheinlichkeits-verteilung von $(f_{k+e_i} \mid k \in \mathbb{N}^d)$ mit der von $(f_k \mid k \in \mathbb{N}^d)$ überein.

Definiert man dazu für $n \in \mathbb{N}^d$, $n \geq \mathbb{1}$ und $k \in \mathbb{N}^d$:

$$f_k^n := (-1)^d \cdot |n|^{-1} \cdot \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,k+r} \ ,$$

so gilt für $s \leq k \leq t - \mathbb{1}$ und $n \geq t$:

$$|n| \cdot f_k^n = (-1)^d \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,k+r}$$

$$= (-1)^d \sum_{r=k+\mathbb{1}}^{k+n} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,r}$$

$$\leq (-1)^d \sum_{r=t+\mathbb{1}}^{n} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,r} + (|n| - |n-t|) \cdot x_{k,k+\mathbb{1}} \qquad \text{f.s.} \ .$$

Die letzte Umformung folgt aus Bedingung (1.10) ,welche für alle $r \geq k + \mathbb{1}$ sicherstellt,daß

$$(-1)^d \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,r} \leq x_{k,k+\mathbb{1}} \qquad \text{f.s.}$$

(Bedingung (1.6) reicht an dieser Stelle nicht aus !) ;außerdem ist zu beachten,daß $|n-t|$ die Mächtigkeit der Menge

$$\{ r \in \mathbb{N}^d \mid t+\mathbb{1} \leq r \leq n \}$$

auch dann korrekt wiedergibt,wenn diese Menge leer ist.

(Da oben $n \geq t$ verlangt ist,geschieht dies immer,wenn $n_j = t_j$ für ein $j \in \{1,..,d\}$).

Somit gilt

$$|n| \cdot \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k^n \leq (-1)^d \cdot \sum_{r=t+\mathbb{1}}^{n} \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} x_{\cdot,r} + (|n|-|n-t|) \cdot \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} x_{k,k+\mathbb{1}} \qquad \text{f.s.}$$

$$\underset{(2.6)}{=\!=} (-1)^d \sum_{r=t+\mathbb{1}}^{n} \Delta_s^t x_{\cdot,r} + (|n|-|n-t|) \cdot \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} x_{k,k+\mathbb{1}} \qquad \text{f.s.}$$

$$\underset{(1.10)}{\leq\!=} |n-t| \cdot x_{s,t} + (|n| - |n-t|) \cdot \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} x_{k,k+\mathbb{1}} \qquad \text{f.s.} \ .$$

Zusammenfassend:

(2.11) Für $s \leq t - \mathbb{1}$ und $n \geq t$ gilt:

$$\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k^n \leq x_{s,t} + \left(1 - \frac{|n-t|}{|n|}\right) \cdot v_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad ;\text{dabei ist}$$

$$v_{s,t} := \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} x_{k,k+\mathbb{1}} - x_{s,t} \quad .$$

Insbesondere gilt $v_{0,\mathbb{1}} = x_{0,\mathbb{1}} - x_{0,\mathbb{1}} = 0$,d.h. (2.11) liefert für $s=0$ und $t=\mathbb{1}$:

(2.12) Für $n \geq \mathbb{1}$ gilt $f_0^n \leq x_{0,\mathbb{1}}$ f.s. .

Definitionsgemäß gilt weiter:

$$\begin{aligned}
E(f_0^n) &= (-1)^d |n|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} E(\Delta_0^{\mathbb{1}} x_{\cdot,r}) \\
&= (-1)^d |n|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_0^{\mathbb{1}} E(x_{\cdot,r}) \\
&\underset{(1.9)}{=} (-1)^d |n|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_0^{\mathbb{1}} E(x_{0,r-\cdot}) \\
&\underset{(2.5)}{=} (-1)^d |n|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_r^{r-\mathbb{1}} E(x_{0,\cdot}) \\
&\underset{(2.4)}{=} |n|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{n} \Delta_{r-\mathbb{1}}^{r} E(x_{0,\cdot}) \\
&= |n|^{-1} \sum_{r=0}^{n-\mathbb{1}} \Delta_r^{r+\mathbb{1}} E(x_{0,\cdot}) \\
&\underset{(2.6)}{=} |n|^{-1} \Delta_0^n E(x_{0,\cdot}) \\
&= |n|^{-1} \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} \cdot E(x_{0,0 \overset{\circ}{v} n})
\end{aligned}$$

Für alle v mit $v_j=1$ in einer Koordinate $j \in \{1,..,d\}$ stimmt $0 \overset{\circ}{v} n$ mit 0 in dieser Koordinate überein,d.h. es gilt nach (1.7) :

$$x_{0,0 \overset{\circ}{v} n} = 0 \quad \text{f.s.} \quad .$$

Die obige Summe reduziert sich daher auf den einen Summanden mit $v = (2,..,2)$:

(2.13) Für $n \geq \mathbb{1}$ gilt $E(f_0^n) = |n|^{-1} E(x_{0,n}) \geq \gamma(x)$.

Aus (2.12) und (2.13) folgt nun,daß

$$\begin{aligned}
E|f_0^n| &= E|f_0^n - x_{0,\mathbb{1}} + x_{0,\mathbb{1}}| \\
&\leq E|f_0^n - x_{0,\mathbb{1}}| + E|x_{0,\mathbb{1}}| \\
&\underset{(2.12)}{=} E(x_{0,\mathbb{1}}) - E(f_0^n) + E|x_{0,\mathbb{1}}| \\
&\leq g_{\mathbb{1}} - \gamma(x) + E|x_{0,\mathbb{1}}| \qquad \text{für alle } n \geq \mathbb{1} \quad .
\end{aligned}$$

Also ist die Diagonalfolge $(f_0^{(n)} \mid n=1,2,3,..)$ gleichmässig in $L_1(P)$ beschränkt ($(n) := (n,..,n) \in \mathbb{N}^d$) .

Aus dem Satz von Komlós [1967] ,welcher besagt,daß solche Folgen eine Teilfolge besitzen,deren Cesàro-Mittel fast sicher gegen eine integrierbare Funktion konvergieren,erhält man daher :

$$\frac{f_0^{(n_1)} + \cdots + f_0^{(n_j)}}{j} \xrightarrow[(j \to \infty)]{\text{f.s.}} f_0 \in L_1(P) \quad .$$

Wegen Bedingung (1.9) ist $(f_k^n \mid k \in \mathbb{N}^d)$ für jedes feste $n \in \mathbb{N}^d$, $n \geq \mathbb{1}$ im Sinn von (2.10) stationär.Daher gilt sogar für alle $k \in \mathbb{N}^d$:

$$c_k^j := \frac{f_k^{(n_1)} + \cdots + f_k^{(n_j)}}{j} \xrightarrow[(j \to \infty)]{\text{f.s.}} f_k \in L_1(P) \quad .$$

Es wird nun gezeigt,daß die Familie $(f_k \mid k \in \mathbb{N}^d)$ die gewünschten Eigen-schaften hat.

zu (2.10) : Klar.

zu (2.9) : Seien dazu

$$c_k^j(t) := j^{-1} \sum_{\nu=\nu(t)}^{\nu(t)+j-1} f_k^{(n_\nu)}$$

mit

$$\nu(t) := \min\{\nu = 1,2,3,.. \mid (n_\nu) \geq t\}$$

gesetzt.Dann gilt für $s \leq t-\mathbb{1}$ und für alle $j \in \{1,2,3,..\}$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} c_k^j(t) &= j^{-1} \sum_{\nu=\nu(t)}^{\nu(t)+j-1} \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k^{(n_\nu)} \\
&\underset{(2.11)}{\leq} j^{-1} \sum_{\nu=\nu(t)}^{\nu(t)+j-1} \left(x_{s,t} + \left(1 - \frac{|(n_\nu) - t|}{|(n_\nu)|}\right) \cdot v_{s,t}\right) \quad \text{f.s.}
\end{aligned}$$

Also

$$\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} c_k^j(t) \leq x_{s,t} + j^{-1} \sum_{\nu=\nu(t)}^{\nu(t)+j-1} \left(1 - \frac{|(n_\nu) - t|}{|(n_\nu)|}\right) \cdot v_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad .$$

Da $c_k^j(t)$ sich für $j \to \infty$ wie c_k^j verhält,also f.s. gegen f_k konvergiert, und da die Cesàro-Mittel einer Nullfolge ebenfalls eine Nullfolge bilden, liefert Grenzübergang $j \to \infty$:

$$\sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k \leq x_{s,t} \quad \text{f.s.} \quad .$$

(2.8) schließlich,zeigt man in zwei Schritten.

$$E(f_0) \underset{(2.10)}{=\!=} |t|^{-1} \sum_{k=0}^{t-\mathbb{1}} E(f_k)$$

$$= |t|^{-1} E\left(\sum_{k=0}^{t-\mathbb{1}} f_k\right)$$

$$\underset{(2.9)}{\leq\!=} |t|^{-1} E(x_{0,t})$$

Grenzübergang $t \to \infty$ liefert mit Satz 2.2 :

$$E(f_0) \leq \gamma(x) \quad .$$

Andererseits gilt

$$g_{\mathbb{1}} - E(f_0) = E(x_{0,\mathbb{1}} - f_0)$$

$$= E(\liminf_{j\to\infty}(x_{0,\mathbb{1}} - c_0^j))$$

$$\leq \liminf_{j\to\infty} E(x_{0,\mathbb{1}} - c_0^j)$$

$$= E(x_{0,\mathbb{1}}) - \lim_{j\to\infty} E(c_0^j)$$

$$= g_{\mathbb{1}} - \gamma(x) \quad .$$

Bei der Ungleichung darf wegen

$$x_{0,\mathbb{1}} - c_0^j \geq 0 \quad \text{(Definition von } c_0^j \text{ und (2.12))}$$

das Lemma von Fatou angewandt werden.

Die letzte Umformung ergibt sich folgendermaßen :

$$E(f_0^{(n_\nu)}) \underset{(2.13)}{=\!=} |(n_\nu)|^{-1} \cdot E(x_{0,(n_\nu)})$$

$$\xrightarrow[(\nu\to\infty)]{} \gamma(x) \qquad \text{(mit Satz 2.2)} \quad .$$

Also gilt dasselbe für die Cesàro-Mittel dieser Folge:

$$E(c_0^j) = j^{-1} \sum_{\nu=1}^{j} E(f_0^{(n_\nu)}) \xrightarrow[(j\to\infty)]{} \gamma(x) \quad .$$

Der letzte Teil des Beweises besteht in der Darstellung der Kingman'schen Zerlegung durch die Familie $(f_k \mid k \in \mathbb{N}^d)$.

Setzt man

$$y_{s,t} := \sum_{k=s}^{t-\mathbb{1}} f_k \quad ,$$

so ist $(y_{s,t} \mid s \leq t)$ ein additiver Prozess;insbesondere folgt

$$(-1)^d \Delta_s^t y_{\cdot,u} = y_{s,t} \qquad \text{für alle } s \leq t \leq u$$

aus Gleichung (2.7) .

$(z_{s,t} \mid s \leq t)$ mit $z_{s,t} := x_{s,t} - y_{s,t}$ ist dann also stark subadditiv.

Wegen (2.9) und (1.7) gilt $z \geq 0$. $\gamma(z) = 0$ folgt aus:

$$E(|t|^{-1} z_{0,t}) = |t|^{-1} \cdot E(x_{0,t}) - |t|^{-1} \sum_{k=0}^{t-\mathbb{1}} E(f_k)$$

$$\underset{(2.10)}{=\!=} |t|^{-1} \cdot E(x_{0,t}) - E(f_0)$$

$$\underset{(2.8)}{=\!=} |t|^{-1} \cdot E(x_{0,t}) - \gamma(x)$$

$$\xrightarrow[(t\to\infty)]{} 0 \qquad \text{nach Satz 2.2} \quad .$$

Damit ist Satz 2.3 bewiesen. ■

2.5 Bemerkung

Man fragt sich hier,ob zum Beweis des Kingman'schen Zerlegungssatzes,wie in Dimension 1, schon allein Subadditivität ausreichen könnte.

Dies ist nicht der Fall.

In der Arbeit von M.A.Akcoglu und U.Krengel [1981] findet sich das Beispiel eines 2-dimensionalen subadditiven Prozesses,der keine Kingman'sche Zerlegung besitzt.

3.Shifts

Als Abschluß dieses ersten Teils und besonders in Hinblick auf den zweiten Teil,soll in diesem Abschnitt für stark subadditive Prozesse

$$x := (x_{s,t} \mid s \leq t)$$

gezeigt werden,daß, o.B.d.A. ,erstens die Forderungen (1.7) , (1.10) und damit auch (1.8) ,(vgl. Bemerkung 1.10),nicht nur fast sicher,sondern für alle $\omega \in \Omega$ erhoben werden dürfen,und daß zweitens kommutative,inver-tierbare,maßtreue Transformationen

$$\theta_1 , \ldots , \theta_d : \Omega \longrightarrow \Omega$$

existieren,sodaß für alle $i \in \{1,..,d\}$, $s \leq t$, $\omega \in \Omega$ die folgende Gleichung gilt:

$$x_{s+e_i,t+e_i}(\omega) = x_{s,t}(\theta_i \omega) \quad .$$

Diese zusätzlichen Eigenschaften werden es ermöglichen einen stochastischen stark subadditiven Prozess,als einen stark subadditiven Prozess bezüglich eines markov'schen Operators aufzufassen.
Insbesondere werden die stochastischen stark subadditiven Prozesse alle Inver-tierbarkeitsannahmen im zweiten Teil erfüllen.

Im Folgenden wird zu $(\Omega , \mathcal{A} , P)$ und x ein Wahrscheinlichkeitsraum und darauf ein Prozess konstruiert,dessen Verteilung mit der Verteilung von x in $(\Omega , \mathcal{A} , P)$ übereinstimmt,und der alle genannten Forderungen erfüllt.
Die im Folgenden gebrauchten Argumente finden sich für den eindimensionalen Fall im Buch von U.Krengel [1985,Seite 39 und §1.4] .

Sei wie schon in der Einführung

$$\mathcal{R}'(d) = \{ (s,t) \in \mathbb{N}^d \times \mathbb{N}^d \mid s \leq t \} \quad .$$

Für $\mathcal{R}^*(d) := \{ (s,t) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \mid s \leq t \}$

setze man:

$$\Omega^* := \mathbb{R}^{\mathcal{R}^*(d)} = \{ \mathcal{R}^*(d) \longrightarrow \mathbb{R} \} ,$$

$$\mathcal{A}^* := \mathcal{B}^{\mathcal{R}^*(d)} \quad ,(\mathcal{B} \text{ die Borel'sche } \sigma\text{-Algebra }),$$

sowie $x^* := (x^*_R \mid R \in \mathcal{R}'(d)) ,$

wobei $x^*_R : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R} , \omega \longmapsto \omega(R)$

die R-te Koordinatenabbildung ist.
Dann gilt:

Satz 3.1
Es gibt ein Wahrscheinlichkeitsmaß P^* auf $(\Omega^* , \mathcal{A}^*)$,sodaß x^* unter P^* dieselbe Verteilung wie x unter P hat.

Beweis
Für $R = (s,t) \in \mathcal{R}^*(d)$ und $r \in \mathbb{N}^d$ sei $r + R := (r+s , r+t) \in \mathcal{R}^*(d)$.
Sei J eine endliche und nicht-leere Teilmenge von $\mathcal{R}^*(d)$ .Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}^d$,sodaß

$$\{ r + R \mid R \in J \} \subset \mathcal{R}'(d) \quad .$$

Für $\bigotimes_{R \in J} B_R \in \mathcal{B}^J$ ist jedoch

$$P(\bigcap_{R \in J} \{ x_{r+R} \in B_R \})$$

wegen (1.9) unabhängig von der speziellen Wahl des Vektors r .
Daher wird auf $(\mathbb{R}^J , \mathcal{B}^J)$ durch

$$(3.1) \qquad P_J(\bigotimes_{R \in J} B_R) := P(\bigcap_{R \in J} \{ x_{r+R} \in B_R \})$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß P_J wohldefiniert.
Es wird nun gezeigt,daß die Familie

$$(P_J \mid J \subset \mathcal{R}^*(d) , J \text{ endlich und nicht-leer })$$

konsistent ist;d.h. für endliche $J \subset K \subset \mathcal{R}^*(d)$ gilt:

$$P_J = P_K \circ (pr^K_J)^{-1} \quad ,$$

wobei $pr^K_J : \mathbb{R}^K \longrightarrow \mathbb{R}^J$ die Projektion von $\mathbb{R}^K$ auf die J-ten Koordinaten ist.
Seien dazu

$$B = \bigotimes_{R \in J} B_R \in \mathcal{B}^J$$

und $r \in \mathbb{N}^d$,mit $\{r+R \mid R \in K\} \subset \mathcal{R}'(d)$,gewählt.
Dann gilt:

$$P_K \circ (\mathrm{pr}_J^K)^{-1}(B)$$

$$= P_K\Big(\bigotimes_{R\in K} D_R\Big) \quad , \quad D_R := \begin{cases} B_R & R \in J \\ \mathbb{R} & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\underset{(3.1)}{=\!=} P\Big(\bigcap_{R\in K} \{x_{r+R} \in D_R\}\Big)$$

$$= P\Big(\bigcap_{R\in J} \{x_{r+R} \in B_R\}\Big)$$

$$\underset{(3.1)}{=\!=} P_J(B)$$

Dies liefert die gewünschte Identität auf ganz $\mathcal{B}^J$.
Nach dem Erweiterungssatz von Kolmogorov gibt es daher ein Wahrscheinlich-
-keitsmaß P^* auf $(\Omega^*, \mathcal{B}^*)$,mit:

(3.2) Für alle $J \subset \mathcal{R}^*(d)$, J endlich und nicht-leer,gilt

$P^* \circ \mathrm{pr}_J^{-1} = P_J$,

wobei $\mathrm{pr}_J : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}^J$ die Projektion von Ω^* auf die J-ten Koordinaten ist.

Aus (3.1) und (3.2) folgt:

(3.3) Für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ und $R_1,\ldots,R_n \in \mathcal{R}^*(d)$ gilt

$$P^*(\mathrm{pr}_{R_1} \in B_1, \ldots, \mathrm{pr}_{R_n} \in B_n)$$

$$= P(x_{r+R_1} \in B_1, \ldots, x_{r+R_n} \in B_n) \quad ,$$

wobei $r \in \mathbb{N}^d$ mit $r+R_1, \ldots, r+R_n \in \mathcal{R}'(d)$,und $\mathrm{pr}_R : \Omega^* \longrightarrow \mathbb{R}$ die Projektion von Ω^* auf die R-te Koordinate ist.

Insbesondere:

(3.4) Für alle $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ und $R_1,\ldots,R_n \in \mathcal{R}'(d)$ gilt

$$P^*(x^*_{R_1} \in B_1, \ldots, x^*_{R_n} \in B_n) = P(x_{R_1} \in B_1, \ldots, x_{R_n} \in B_n) \ .$$

■

Setzt man für $i \in \{1,\ldots,d\}$:

$$\theta_i : \Omega^* \longrightarrow \Omega^*$$
$$\omega \longmapsto \Big(\mathcal{R}^*(d) \longrightarrow \mathbb{R} \ ,\ R \longmapsto \omega(e_i + R) \Big) \quad ,$$

also $\theta_i\omega = \omega(e_i + \cdot)$,so erfüllen diese <u>shifts</u> offenbar:

(3.5) Für alle $R \in \mathcal{R}^*(d)$ und für alle $\omega \in \Omega^*$ gilt

$$\mathrm{pr}_{e_i+R}(\omega) = \mathrm{pr}_R(\theta_i\omega) \ .$$

Insbesondere gelten also für x^* die gewünschten Gleichungen:

(3.6) Für alle $R \in \mathcal{R}'(d)$ und für alle $\omega \in \Omega^*$ gilt

$$x^*_{e_i+R}(\omega) = x^*_R(\theta_i\omega) \ .$$

Ferner gilt:

<u>3.2 Satz</u>
$\theta_1, \ldots, \theta_d$ sind kommutativ,invertierbar und maßtreu auf $(\Omega^*, \mathcal{B}^*, P^*)$.

<u>Beweis</u>
Kommutativ: Klar.
Invertierbar: $\Omega^* \longrightarrow \Omega^*$, $\omega \longmapsto \omega(-e_i + \cdot)$ ist die Umkehrabbildung von θ_i .
Maßtreu: Dazu wird nur

$$P^*(\theta_i^{-1}B^*) = P^*(B^*)$$

für die endlichdimensionalen Zylindermengen $B^* \in \mathcal{B}^*$ gezeigt.
Sei also $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{B}$ und $R_1,\ldots,R_n \in \mathcal{R}^*(d)$ .Dann gilt

$$P^*(\theta_i^{-1}\{\mathrm{pr}_{R_1} \in B_1, \ldots, \mathrm{pr}_{R_n} \in B_n\})$$

$$= P^*(\mathrm{pr}_{R_1} \circ \theta_i \in B_1, \ldots, \mathrm{pr}_{R_n} \circ \theta_i \in B_n)$$

$$\underset{(3.5)}{=\!=} P^*(\mathrm{pr}_{e_i+R_1} \in B_1, \ldots, \mathrm{pr}_{e_i+R_n} \in B_n)$$

$$\underset{(3.3)}{=\!=} P(x_{r+e_i+R_1} \in B_1, \ldots, x_{r+e_i+R_n} \in B_n)$$

$$\underset{(1.9)}{=} p(x_{r+R_1} \in B_1 , \ldots , x_{r+R_n} \in B_n)$$
$$\underset{(3.3)}{=} p^*(pr_{R_1} \in B_1 , \ldots , pr_{R_n} \in B_n) \quad \blacksquare$$

Somit bliebe zu zeigen,daß x^* die folgenden zwei Bedingungen für alle $\omega \in \Omega^*$ erfüllt:

(3.7) Für alle $(s,t) \in \mathbb{R}'(d)$ mit $s_j = t_j$ in einer Koordinate $\{1,\ldots,d\}$,gilt
$x^*_{s,t}(\omega) = 0$.

(3.8) Für alle (s,t) und $(t,u) \in \mathbb{R}'(d)$ gilt
$(-1)^d \Delta^t_s x^*_{\cdot,u}(\omega) \leq x^*_{s,t}(\omega)$.

Dies ist i.A. nicht möglich.
Für
$$\tilde{\Omega} := \{ \omega \in \Omega^* \mid (3.7) \text{ und } (3.8) \text{ sind erfüllt} \}$$
gilt jedoch nach Satz 3.1 ,sowie Bedingung (1.7) und (1.10) :
$$p^*(\tilde{\Omega}) = 1 .$$
Durch die Restriktion von $(\Omega^* , \mathcal{A}^* , p^*)$ und x^* auf $\tilde{\Omega}$ erhält man daher einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\tilde{\Omega} , \tilde{\mathcal{A}} , \tilde{P})$ und darauf einen Prozess $\tilde{x}$,welcher (sozusagen gewaltsam) alle gewünschten Bedingungen erfüllt.
Insbesondere folgt:

(3.9) Für alle $R \in \mathbb{R}'(d)$ und für alle $\omega \in \tilde{\Omega}$ gilt
$\tilde{x}_{e_i+R}(\omega) = \tilde{x}_R(\theta_i \omega)$

aus (3.6) und dem nachfolgenden Satz.

<u>3.3 Satz</u>
Die θ_i ,($i \in \{1,\ldots,d\}$), führen nicht aus $\tilde{\Omega}$ heraus,d.h. es gilt
$$\theta_i(\tilde{\Omega}) \subset \tilde{\Omega} .$$

<u>Beweis</u>
Sei $\omega \in \tilde{\Omega}$ fest gewählt.

Sind s , t wie in (3.7) ,so gilt:
$$x^*_{s,t}(\theta_i \omega) \underset{(3.6)}{=} x^*_{s+e_i,t+e_i}(\omega) \underset{(3.7)}{=} 0 .$$
Sind s,t,u wie in (3.8) ,so gilt:
$$(-1)^d \Delta^t_s x^*_{\cdot,u}(\theta_i \omega) \underset{(3.6)}{=} (-1)^d \Delta^t_s x^*_{\cdot+e_i,u+e_i}(\omega)$$
$$\underset{(2.5)}{=} (-1)^d \Delta^{t+e_i}_{s+e_i} x^*_{\cdot,u+e_i}(\omega)$$
$$\underset{(3.8)}{\leq} x^*_{s+e_i,t+e_i}(\omega)$$
$$\underset{(3.6)}{=} x^*_{s,t}(\theta_i \omega) .$$
Somit erfüllt mit ω auch $\theta_i \omega$ die Bedingungen (3.7) und (3.8) . $\blacksquare$

Abschließend sei noch erwähnt,daß dieser Satz,sowie $p^*(\tilde{\Omega}) = 1$ und Satz 3.2 sicherstellen,daß $\theta_1 , \ldots , \theta_d$ auch in $(\tilde{\Omega} , \tilde{\mathcal{A}} , \tilde{P})$ kommutative,inver-
-tierbare und maßtreue Transformationen sind.

II. Mehrdimensionale subadditive Prozesse bezüglich markovscher Operatoren

4. Einführung

In diesem zweiten Teil wird eine Verallgemeinerung des Kingman'schen Zerlegungssatzes bewiesen, welche im eindimensionalen Fall auf M.A. Akcoglu und L. Sucheston [1978] zurückgeht.

Sei $(X, \mathcal{F}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und seien $T_1, \ldots, T_d$ kommutative, lineare und positive Operatoren auf $L_1 = L_1(X, \mathcal{F}, \mu)$.

(T_i positiv $\iff T_i L_1^+ \subset L_1^+$).

Für $u \in \mathbb{N}^d$ sei $T^u := T_1^{u_1} \circ \cdots \circ T_d^{u_d}$.

4.1 Definition
Eine Familie $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d) \subset L_1$ heißt (d-dimensionaler) subadditiver Prozess (bezüglich $T_1, \ldots, T_d$), falls

(4.1) Für alle $n \in \mathbb{N}^d$ mit $|n| = 0$, gilt $F_n = 0$.

(4.2) Für jede feste Koordinate $i \in \{1, \ldots, d\}$ und für alle $n \in \mathbb{N}^d$, $m_i \in \mathbb{N}$, gilt

$$F_{n+(0,\ldots,m_i,\ldots,0)} \leq F_{(n_1,\ldots,m_i,\ldots,n_d)} + T_i^{m_i} F_n .$$

(4.3) $\inf_{\substack{n \in \mathbb{N}^d \\ |n| \geq 1}} |n|^{-1} \cdot \int F_n \, d\mu > -\infty$.

4.2 Definition
Ein subadditiver Prozess $(F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ heißt (d-dimensionaler) stark subadditiver Prozess (bezüglich $T_1, \ldots, T_d$), falls

(4.4) Für alle $m, n \in \mathbb{N}^d$ gilt $(-1)^d \Delta_0^m T^{\bullet} F_{m+n-\bullet} \leq F_m$.

F heißt (stark) superadditiv, falls $-F$ (stark) subadditiv.
F heißt additiv, falls F sub- und superadditiv ist.

4.3 Bemerkung
In Definition 4.2 kann man auf (4.2) verzichten, denn es gilt:

(4.1), (4.4) $\Longrightarrow$ (4.2).

(vgl. Bemerkung 1.10).

Bevor die subadditiven Prozesse aus Teil I und II miteinander verglichen werden, soll zunächst gezeigt werden, daß subadditive Prozesse bezüglich markovscher Operatoren eine Zeitkonstante besitzen.

4.4 Definition
Ein linearer, positiver Operator $T : L_1 \longrightarrow L_1$ heißt markovsch, falls:

(4.5) Für alle $f \in L_1$ gilt $\int Tf \, d\mu = \int f \, d\mu$.

4.5 Satz
Ist $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ ein subadditiver Prozess bezüglich markovscher Operatoren, so gilt:

$\gamma(F) := \lim_{n \to \infty} |n|^{-1} \cdot \int F_n \, d\mu$ existiert und ist endlich.

Beweis
Offenbar ist $(g_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$, $g_n := \int F_n \, d\mu$, wegen (4.2) und (4.5) eine subadditive Zahlenfolge.
Die Behauptung folgt daher aus Satz 2.1 und (4.3). ■

4.6 Bemerkung
Sei $x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$ ein stochastischer, d-dimensionaler, stark subadditiver Prozess mit den zusätzlichen Eigenschaften aus Abschnitt 3.
Setzt man dann

$$T_i : L_1 \longrightarrow L_1, \quad f \longmapsto f \circ \theta_i ,$$

so gilt:

(4.6) $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$, $F_n := x_{0,n}$, ist ein stark subadditiver Prozess (bezüglich den markovschen $T_1, \ldots, T_d$), und es gilt $\gamma(F) = \gamma(x)$.

Umgekehrt:

Sei $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\theta_1, \ldots, \theta_d$ beliebige kommutative, maßtreue Transformationen auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$.
Sind dann $T_1, \ldots, T_d$ wie oben, und $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ stark subadditiv bezüglich $T_1, \ldots, T_d$, so gilt:

(4.7) $x = (x_{s,t} \mid s \leq t)$, $x_{s,t} := T^s F_{t-s}$, ist ein stark subadditiver Prozess auf $(\mathcal{X}, \mathcal{F}, \mu)$, und es gilt $\gamma(x) = \gamma(F)$.

Beweis von (4.6):

T_i markovsch: Für $f \in L_1$ gilt

$$\int T_i f \, dP = \int f \circ \theta_i \, dP = \int f \, d(P \circ \theta_i^{-1}) = \int f \, dP$$

F stark subadditiv: (4.1) und (4.3) sind klar.
Seien also m,n wie in (4.4). Dann gilt:

$$(-1)^d \Delta_0^m T^{\cdot} F_{m+n-\cdot} =$$

$$= (-1)^d \Delta_0^m x_{0,m+n-\cdot} \circ \theta^{\cdot}, \quad \theta^u := \theta_1^{u_1} \circ \cdots \circ \theta_d^{u_d}$$

$$= (-1)^d \Delta_0^m x_{\cdot,m+n}$$

$$\underset{(1.10)}{\leq} x_{0,m}$$

$$= F_m .$$

$\gamma(F) = \gamma(x)$: Klar.

Beweis von (4.7):

(1.7) und (1.3) sind klar.
zu (1.9) : Dazu wird für endliches $J \subset \mathcal{R}'(d)$ gezeigt, daß für jede Wahl von $B_R \in \mathcal{B}$, $(R \in J)$, die folgende Identität gilt:

$$\mu\Big(\bigcap_{R \in J} \{ x_{e_i+R} \in B_R \}\Big) = \mu\Big(\bigcap_{R \in J} \{ x_R \in B_R \}\Big) .$$

Für $R = (s,t) \in \mathcal{R}'(d)$ gilt:

$$x_{e_i+R} = x_{e_i+s,e_i+t} = T^{e_i+s} F_{t-s} = T_i(T^s F_{t-s}) = T_i x_{s,t} = x_R \circ \theta_i .$$

Somit:

$$\mu\Big(\bigcap_{R \in J} \{ x_{e_i+R} \in B_R \}\Big)$$

$$= \mu\Big(\theta_i^{-1} \bigcap_{R \in J} \{ x_R \in B_R \}\Big) = \mu\Big(\bigcap_{R \in J} \{ x_R \in B_R \}\Big) .$$

zu (1.10) : Seien also $s \leq t \leq u$. Dann gilt für $m := t-s$ und $n := u-t$:

$$x_{s,t} = T^s F_m$$

$$\underset{(4.4)}{\geq} T^s((-1)^d \Delta_0^m T^{\cdot} F_{m+n-\cdot})$$

$$= (-1)^d \Delta_0^m T^{s+\cdot} F_{u-(s+\cdot)})$$

$$= (-1)^d \Delta_0^{t-s} x_{s+\cdot,u}$$

$$\underset{(2.5)}{=} (-1)^d \Delta_s^t x_{\cdot,u} .$$

$\gamma(x) = \gamma(F)$: Klar. ■

Somit liefert eine Zerlegung $F = G + H$ in einen additiven Prozess G und einen stark subadditiven Prozess H, mit $\gamma(H) = 0$ und $H \geq 0$, eine Kingmansche Zerlegung $x = y + z$.
($F_n := x_{0,n}$, $y_{s,t} := T^s G_{t-s}$, $z_{s,t} := T^s H_{t-s}$).
Der Beweis dieser Zerlegung – in allgemeineren Fällen als den der obigen $T_1, \ldots, T_d$ – ist daher Ziel dieses zweiten Teils.

4.7 Definition

Seien $T_1, \ldots, T_d$ kommutative markovsche Operatoren und $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ ein superadditiver Prozess.

Ein additiver Prozess $G = (G_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ heißt exakte Dominante von F, falls:

(4.8) Für alle $n \in \mathbb{N}^d$ gilt $G_n \geq F_n$.

(4.9) $\gamma(G) \leq \gamma(F)$.

4.8 Bemerkung

Sind $T_1, \ldots, T_d$ kommutative markovsche Operatoren, so ist offensichtlich die Existenz einer exakten Dominante G für einen stark superadditiven Prozess F äquivalent zur Existenz einer Zerlegung des stark subadditiven Prozesses $-F$ in einen additiven Prozess $-G$ und einen nichtnegativen stark subadditiven Prozess $G - F$ mit Zeitkonstante Null.
($-F = -G + (G-F)$).

Abschließend wird nun ein einfacher, jedoch sehr nützlicher Satz bewiesen, welcher im markovschen Fall zeigt, daß ein additiver Prozess G und dessen Zeitkonstante $\gamma(G)$ vollständig durch $G_{\mathbb{1}}$ bestimmt sind.
Aus diesem Grund wird auch manchmal $G_{\mathbb{1}}$ als exakte Dominante bezeichnet.

4,9 Satz
Ist F ein superadditiver Prozess, so gilt:

$$(4.10) \qquad F_n \geq \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k F_{\mathbb{1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^d \ .$$

Insbesondere gilt also für einen additiven Prozess G und markovsche $T_1, \ldots, T_d$:

$$(4.11) \qquad G_n = \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k G_{\mathbb{1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^d \ .$$

$$(4.12) \qquad \gamma(G) = \int G_{\mathbb{1}} \, d\mu \ .$$

Beweis
Seien $i \in \{1,\ldots,d\}$ und $n_1,\ldots,n_{i-1},n_{i+1},\ldots,n_d \in \mathbb{N}$ fest gewählt.
Dann gilt für alle $n_i \in \mathbb{N}$:

$$(4.13) \qquad F_n \geq \sum_{k_i=0}^{n_i-1} T_i^{k_i} F_{(n_1,\ldots,n_{i-1},1,n_{i+1},\ldots,n_d)} \ .$$

Induktionsanfang $n_i = 0$: Klar.

Induktionsschluß $n_i \to n_i+1$:

Da F superadditiv ist, gilt (gemäß (4.2) mit „$\geq$") :

$$F_{(n_1,\ldots,n_i+1,\ldots,n_d)} \geq F_{(n_1,\ldots,1,\ldots,n_d)} + T_i F_n$$

$$\underset{(4.13)}{\geq} F_{(n_1,\ldots,1,\ldots,n_d)} + T_i \sum_{k_i=0}^{n_i-1} T_i^{k_i} F_{(n_1,\ldots,1,\ldots,n_d)}$$

$$= \sum_{k_i=0}^{n_i} T_i^{k_i} F_{(n_1,\ldots,1,\ldots,n_d)} \ .$$

(4.13) liefert aber nun sofort die Behauptung:

$$F_n \geq \sum_{k_1=0}^{n_1-1} T_1^{k_1} F_{(1,n_2,\ldots,n_d)} \geq \ldots \geq \sum_{k_1=0}^{n_1-1} T_1^{k_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} T_d^{k_d} F_{(1,\ldots,1)}$$

$$= \sum_{k_1=0}^{n_1-1} \cdots \sum_{k_d=0}^{n_d-1} T_1^{n_1} \cdots T_d^{n_d} F_{(1,\ldots,1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k F_{\mathbb{1}} \ .$$

■

5. Die exakte Dominante

Ziel dieses Abschnitts ist es zu beweisen, daß im markovschen Fall jeder stark superadditive Prozess wenigstens eine exakte Dominante besitzt, was nach Bem-erkungen 4.6 und 4.8 eine präzise Verallgemeinerung des Kingmanschen Zerlegungssatzes ist.
Leider wird dies nur in - allerdings sehr wichtigen - Spezialfällen gelingen.

Der folgende Satz ist von entscheidender Bedeutung.
Im Fall eindimensionaler stochastischer Prozesse geht er auf J.F.C.Kingman zurück.

5.1 Satz
Seien $T_1,\dots,T_d$ kommutative markovsche Operatoren und $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ ein stark superadditiver Prozess.
Setzt man für $m \in \mathbb{N}^d$, $m \geq \mathbb{1}$:

$$\varphi_m := |m|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{m} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\bullet} F_{r-\bullet} \quad ,$$

so gilt:

(5.1) $$\int \varphi_m \, d\mu \leq \gamma(F) \quad .$$

(5.2) Für alle $m \geq n \in \mathbb{N}^d$ ist

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k \varphi_m \geq F_n - \Big(1 - \frac{|m-n|}{|m|} \Big) \cdot \Big(F_n - \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k F_{\mathbb{1}} \Big) \quad .$$

Insbesondere ist also $\varphi_m \geq F_{\mathbb{1}}$, $(m \geq \mathbb{1})$.

Beweis
Es gilt für alle $k \in \mathbb{N}^d$:

$$T^k \varphi_m = (-1)^d |m|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{m} \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{k+\bullet} F_{r-\bullet}$$

$$\underset{(2.5)}{=} (-1)^d |m|^{-1} \sum_{r=\mathbb{1}}^{m} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} T^{\bullet} F_{k+r-\bullet}$$

$T^k \varphi_m$ entspricht also f_k^m aus dem Beweis von Satz 2.3 , und genauso folgen (5.2) und (5.1) analog zu (2.11) und (2.13) . ∎

5.2 Bemerkung
Ist $(\varphi_m \mid m \geq \mathbb{1})$ in $L_1(\mu)$ konvergent, etwa

$$\varphi_m \xrightarrow[(m \longrightarrow \infty)]{\| \cdot \|_1} \delta \quad ,$$

so ist $G_{\mathbb{1}} := \delta$ eine exakte Dominante von F .

Beweis
zu (4.8) : Zunächst wird für festes $n \in \mathbb{N}^d$, $n \geq \mathbb{1}$ gezeigt, daß die Diagonalfolge $(\varphi_{(\nu,\dots,\nu)} \mid \nu = 1,2,3,\dots)$ eine Teilfolge $(\phi_\nu^{(n)})_{\nu=1}^{\infty}$ besitzt, sodaß $T^k \phi_\nu^{(n)}$ für alle $k \leq n-\mathbb{1}$ punktweise gegen $T^k \delta$ konvergiert.
Sei dazu $\varkappa_1,\dots,\varkappa_{|n|}$ eine Abzählung von $\{ k \in \mathbb{N}^d \mid 0 \leq k \leq n-\mathbb{1} \}$, welche mit $\varkappa_1 := 0$ beginnt.
Es gilt $\varphi_{(\nu,\dots,\nu)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{\| \cdot \|_1} \delta$. Da Konvergenz in $L_1(\mu)$ stochastische Konvergenz nach sich zieht, gibt es nach einem Satz von Riesz eine Teilfolge $(\phi_\nu^{(1)})_{\nu=1}^{\infty}$ von $(\varphi_{(\nu,\dots,\nu)} \mid \nu = 1,2,3,\dots)$, die punktweise gegen δ konvergiert:

$$\phi_\nu^{(1)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{} \delta \quad ,$$

und wegen $\varkappa_1 = 0$ gleichzeitig:

$$T^{\varkappa_1} \phi_\nu^{(1)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{} T^{\varkappa_1} \delta \quad .$$

Es gilt natürlich weiterhin $\phi_\nu^{(1)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{\| \cdot \|_1} \delta$.

Da $\| T^{\varkappa_2} \| = 1$, $T^{\varkappa_2}$ also stetig in $L_1(\mu)$ ist, gilt auch:

$$T^{\varkappa_2} \phi_\nu^{(1)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{\| \cdot \|_1} T^{\varkappa_2} \delta \quad .$$

Nach dem Satz von Riesz gibt es also eine Teilfolge $(\phi_\nu^{(2)})_{\nu=1}^{\infty}$ von $(\phi_\nu^{(1)})_{\nu=1}^{\infty}$, sodaß:

$$T^{\varkappa_2} \phi_\nu^{(2)} \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{} T^{\varkappa_2} \delta \quad .$$

Sukzessiv fortfahrend,erhält man schließlich:

$$T^{x_j}\,\phi_\nu^{(j)} \xrightarrow[(\nu\longrightarrow\infty)]{} T^{x_j}\,\delta \qquad ,(\ j=1,..,|n|\ ),$$

wobei $(\ \phi_\nu^{(j)}\ )_{\nu=1}^{\infty}$ immer eine Teilfolge von $(\ \phi_\nu^{(j-1)}\ )_{\nu=1}^{\infty}$ ist.

Für die zuletzt gebildete Teilfolge $(\ \phi_\nu^{(n)}\ )_{\nu=1}^{\infty}$, $\phi_\nu^{(n)} := \phi_\nu^{(|n|)}$,gilt folglich:

$$T^k\,\phi_\nu^{(n)} \xrightarrow[(\nu\longrightarrow\infty)]{} T^k\delta \qquad \text{für alle } k \le n-\mathbb{1}\ .$$

Nach (5.2) gilt für $(\nu,..,\nu) \ge n$:

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k\,\phi_\nu^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k\,\varphi_{(n_\nu)} \ge F_n - \Big(\ 1 - \frac{|(n_\nu)-n|}{|(n_\nu)|}\ \Big)\cdot\Big(\ F_n - \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k\,F_{\mathbb{1}}\ \Big),$$

(wobei die Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ von n abhängig ist).

Grenzübergang $\nu\longrightarrow\infty$ liefert:

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k\,G_{\mathbb{1}} \ge F_n\ .$$

(4.11) und (4.1) liefern schließlich das Gewünschte.

zu (4.9) : $\int G_{\mathbb{1}}\,d\mu = \int \delta\,d\mu = \int \lim_{\nu\to\infty} \phi_\nu^{(1)}\,d\mu \le \liminf_{\nu\to\infty} \int \phi_\nu^{(1)}\,d\mu \le \gamma(F)$.

Dabei darf in der ersten Ungleichung wegen $\phi_\nu^{(1)} \ge F_{\mathbb{1}}$ das Lemma von Fatou angewandt werden.

Aus (4.12) folgt das Gewünschte. ■

Leider zeigt jedoch schon der eindimensionale Fall,daß $(\varphi_m \mid m \ge \mathbb{1})$ nicht in $L_1(\mu)$ konvergieren muß.Die exakte Dominante muß daher auf eine andere Art gefunden werden.Der folgende Satz beruht wieder auf den Satz von Komlós, (der auch für σ-endliche Maße gilt).

5.3 Satz

Seien $T_1,\dots,T_d$ kommutative markovsche Operatoren.

Für alle $i \in \{1,..,d\}$ gelte außerdem:

(5.3) $\quad (\ f_j\ )_{j=1}^{\infty} \subset L_1(\mu)\ ,\ f \in L_1(\mu)\ ,\ f_j \xrightarrow[(\ j\longrightarrow\infty\ )]{} f$ (punktweise)

$$\Longrightarrow \quad T_i\,f_j \xrightarrow[(\ j\longrightarrow\infty\ )]{} T_i\,f \quad \text{(punktweise)}\ .$$

Dann besitzt jeder bezüglich $T_1,\dots,T_d$ stark superadditive Prozess F eine exakte Dominante G .

Beweis

Für alle $m \in \mathbb{N}^d$ gilt:

$$\begin{aligned}\|\varphi_m\|_1 &\le \|\varphi_m - F_{\mathbb{1}}\|_1 + \|F_{\mathbb{1}}\|_1\\ &= \int \varphi_m\,d\mu - \int F_{\mathbb{1}}\,d\mu + \|F_{\mathbb{1}}\|_1 \qquad ,\text{denn } \varphi_m \ge F_{\mathbb{1}}\\ &\underset{(5.1)}{\le} \gamma(F) - \int F_{\mathbb{1}}\,d\mu + \|F_{\mathbb{1}}\|_1\ .\end{aligned}$$

Also ist die Diagonalfolge $(\ \varphi_{(\nu,\dots,\nu)} \mid \nu=1,2,3,\dots\ )$ gleichmässig beschränkt.

Nach dem Satz von Komlós gilt somit:

$$\frac{\varphi_{(n_1)} + \dots + \varphi_{(n_j)}}{j} \xrightarrow[(j\longrightarrow\infty)]{} \delta \in L_1(\mu)\ .$$

Es wird nun gezeigt,daß $G_{\mathbb{1}} := \delta$ eine exakte Dominante ist.

zu (4.8) : Sei $n \ge \mathbb{1}$ .Für

$$C_j(n) := j^{-1} \sum_{\nu=\nu(n)}^{\nu(n)+j-1} \varphi_{(n_\nu)} \qquad ,\ \nu(n) := \min\Big\{\ \nu=1,2,3,\dots \mid (n_\nu) \ge n\ \Big\}$$

gilt dann:

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k C_j(n) \underset{(5.2)}{\ge} F_n - j^{-1} \sum_{\nu=\nu(n)}^{\nu(n)+j-1} \Big(\ 1 - \frac{|(n_\nu)-n|}{|(n_\nu)|}\ \Big)\cdot\Big(\ F_n - \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k F_{\mathbb{1}}\ \Big).$$

(Punktweiser) Grenzübergang $j\longrightarrow\infty$ liefert unter Berücksichtigung von (5.3) :

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k\,G_{\mathbb{1}} \ge F_n\ .$$

(4.11) und (4.1) liefern schließlich das Gewünschte.

zu (4.9) :

$$\begin{aligned}\int G_{\mathbb{1}}\,d\mu &= \int \lim_{j\to\infty}\Big(\ j^{-1}\sum_{\nu=1}^{j} \varphi_{(n_\nu)}\ \Big)\,d\mu\\ &\le \liminf\ j^{-1}\sum_{\nu=1}^{j} \int \varphi_{(n_\nu)}\,d\mu \qquad ,\text{denn } (\dots) \ge F_{\mathbb{1}}\\ &\underset{(5.1)}{\le} \gamma(F)\ .\end{aligned}$$

(4.12) vervollständigt den Beweis. ■

5.4 Bemerkung

Dieser Beweis ist eine direkte Übertragung des Beweises von Satz 2.3 in die Operatorversion.So ist es auch nicht weiter überraschend,daß die Vorraussetzung (5.3) trivialerweise für den maßtreuen Fall

$$T_i : L_1 \longrightarrow L_1\ ,\ f \longmapsto f\circ\theta_i \qquad ,(\ \theta_1,\dots,\theta_d \text{ kommutativ,maßtreu }),$$

erfüllt ist.

Die beiden folgenden Sätze stellen das Hauptresultat dieses zweiten Teils dar.

5.5 Satz

Seien $T_1,\dots,T_d$ kommutative markovsche Operatoren und $F = (F_n \mid n \in \mathbb{N}^d)$ ein stark superadditiver Prozess bezüglich $T_1,\dots,T_d$.
Sei $(\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}^d) \subset L_1$ mit:

(5.4) Für alle $k \in \mathbb{N}^d$ gilt $\int \lambda_k \, d\mu \leq \gamma(F)$.

(5.5) Für alle $n \in \mathbb{N}^d$ gilt $\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} \lambda_k \geq F_n$.

(5.6) Für alle $k \in \mathbb{N}^d$, $k \neq 0$ gilt:
$(-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot} \geq 0$, $\Lambda_r := \begin{cases} \lambda_r & r \in \mathbb{N}^d \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$.

Dann ist

$$G_{\mathbb{1}} := \sum_{k \in \mathbb{N}^d} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot}$$

eine exakte Dominante von F .

Beweis

zu (4.8) : Wegen (5.5) reicht es

$$\sum_{r=0}^{n-\mathbb{1}} T^r G_{\mathbb{1}} \geq \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} \lambda_k \qquad ,(n \in \mathbb{N}^d),$$

zu zeigen.
Für $k \in \mathbb{N}^d$ gilt:

$$\sum_{r=0}^{k} T^r((-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-r-\cdot})$$

$$= (-1)^d \sum_{r=0}^{k} \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{r+\cdot} \Lambda_{k-r-\cdot}$$

$$\underset{(2.5)}{=} (-1)^d \sum_{r=0}^{k} \Delta_r^{r+\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot}$$

$$\underset{(2.6)}{=} (-1)^d \Delta_0^{k+\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot}$$

$$= (-1)^d \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} \cdot T^{0 \overset{\circ}{v} (k+\mathbb{1})} \Lambda_{k-(0 \overset{\circ}{v} (k+\mathbb{1}))}$$

Für alle v mit $v_j=2$ in einer Koordinate $j \in \{1,\dots,d\}$ ist

$$k - (0 \overset{\circ}{v} (k+\mathbb{1}))$$

in dieser Koordinate negativ,also nicht aus $\mathbb{N}^d$.
Somit reduziert sich die obige Summe auf den einen Summanden mit $v=\mathbb{1}$,d.h.:

$$\sum_{r=0}^{k} T^r((-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-r-\cdot}) = \lambda_k \quad .$$

Sei nun $n \geq \mathbb{1}$ .Dann folgt:

$$\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} \sum_{r=0}^{k} T^r((-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-r-\cdot})$$

$$= \sum_{0 \leq r \leq k \leq n-\mathbb{1}} \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{n-\mathbb{1}} \sum_{k=r}^{n-\mathbb{1}} \cdots$$

$$= \sum_{r=0}^{n-\mathbb{1}} T^r(\sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}-r} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot})$$

$$\underset{(5.6)}{\leq} \sum_{r=0}^{n-\mathbb{1}} T^r G_{\mathbb{1}} \quad .$$

zu (4.9) : Für

$$\delta_{\nu} := \sum_{k=0}^{(\nu)} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot} \qquad ,(\nu \in \mathbb{N}),$$

gilt:

$$\int \delta_{\nu} \, d\mu = \sum_{k=0}^{(\nu)} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} \int T^{\cdot} \Lambda_{k-\cdot} \, d\mu$$

$$\underset{(4.5)}{=} \sum_{k=0}^{(\nu)} (-1)^d \Delta_0^{\mathbb{1}} \int \Lambda_{k-\cdot} \, d\mu$$

$$\underset{(2.5)}{=} \sum_{k=0}^{(\nu)} (-1)^d \Delta_{k+\mathbb{1}}^{k} \int \Lambda_{-\mathbb{1}+\cdot} \, d\mu$$

$$\underset{(2.4)}{=} \sum_{k=0}^{(\nu)} \Delta_k^{k+\mathbb{1}} \int \Lambda_{-\mathbb{1}+\cdot} \, d\mu$$

$$\underset{(2.6)}{=} \Delta_0^{(\nu)+\mathbb{1}} \int \Lambda_{-\mathbb{1}+\cdot} \, d\mu$$

$$= \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} \int \Lambda_{-\mathbb{1}+(0 \overset{\circ}{v} ((\nu)+\mathbb{1}))} \, d\mu$$

$$= \int \lambda_{(\nu)} \, d\mu \quad ,$$

denn für alle v mit $v_j=1$ in einer Koordinate $j\in\{1,\dots,d\}$ ist

$$-\mathbb{1} + (0 \overset{\circ}{\underset{v}{}} ((\vartheta)+\mathbb{1}))$$

in dieser Koordinate negativ,also nicht aus $\mathbb{N}^d$.
Mit (5.4) folgt:

$$\int \delta_\vartheta \, d\mu \leq \gamma(F) \quad .$$

Wegen (5.6) darf der Satz von Beppo-Levi angewandt werden:

$$\int G_{\mathbb{1}} \, d\mu = \lim_{\vartheta\to\infty} \int \delta_\vartheta \, d\mu \leq \gamma(F) \quad .$$

(4.12) vervollständigt den Beweis. ■

5.6 Bemerkung

Obwohl Bedingung (5.6) durch die willkürliche Festsetzung von $\Lambda_r := 0$, $r \notin \mathbb{N}^d$,sehr künstlich erscheint,ist sie es in Wahrheit nicht.
Für d=2 gilt etwa:

$$G_{(1,1)} = \lambda_{(0,0)} + \sum_{k_1=1}^{\infty}{}'(-1)\,\Delta_0^1\, T_1^*\,\lambda_{(k_1-\cdot,0)}$$
$$+ \sum_{k_2=1}^{\infty}{}'(-1)\,\Delta_0^1\, T_2^*\,\lambda_{(0,k_2-\cdot)}$$
$$+ \sum_{k_1,k_2=1}^{\infty}{}'\,\Delta_{(0,0)}^{(1,1)}\, T^*\,\lambda_{(k_1,k_2)-\cdot}$$

Die Bedingung $\Delta_{(0,0)}^{(1,1)}\, T^*\,\Lambda_{(k_1,k_2)-\cdot} \geq 0$ besagt dann...

...für $k_1=0$,daß die zweite Reihe nur positive Summanden hat,
...für $k_2=0$, " " erste " " " " " ,
...für $k_1,k_2\neq 0$, " " dritte " " " " " .
(5.6) ist also lediglich eine sehr kompakte Schreibweise,um für alle drei Reihen gleichzeitig absolute Konvergenz zu erzwingen.
Für die anderen Dimensionen trifft dies in noch viel stärkeren Maß zu,z.B. liegen für d=3 schon 7 Reihen vor.

Leider ist es nicht gelungen eine Familie $(\lambda_k \mid k\in\mathbb{N}^d)$ zu finden,welche die Bedingungen (5.4) bis (5.6) erfüllt.Mit Blick auf den ersten Teil stellt jedoch der folgende Satz ein befriedigendes Ergebnis dar.

5.7 Satz

Seien $T_1,\dots,T_d$ kommutative markovsche Operatoren und F ein stark super-additiver Prozess bezüglich $T_1,\dots,T_d$.

Dann gibt es eine Familie $(\lambda_k \mid k\in\mathbb{N}^d) \subset L_1$,welche (5.4) , (5.5) und die folgende - im eindimensionalen Fall zu (5.6) gleichwertige - Bedingung erfüllt:

(5.7) Für alle $k,r\in\mathbb{N}^d$ gilt $\lambda_{k+r} \geq T^r \lambda_k$.

Besitzen $T_1,\dots,T_d$ markovsche Umkehrabbildungen,so gilt in (5.7) sogar Gleichheit. (5.6) ist dann „trivialerweise" erfüllt,und $G_{\mathbb{1}} := \lambda_0$ ist eine exakte Dominante für F .

Beweis

Zunächst wird angenommen,daß F nichtnegativ ist und $\mathcal{F}$ durch eine abzählbare Algebra $\mathcal{F}_0$ erzeugt wird.
Sei $h\in L_1$, $h>0$ fest gewählt.
Für jede Wahl von $k\in\mathbb{N}^d$, $j\geq\mathbb{1}$ und $A\in\mathcal{F}_0$ ist die Folge

$$\left(\int_A T^k \varphi_{(\vartheta)} \wedge j\cdot h \; d\mu \;\middle|\; \vartheta=1,2,3,\dots \right)$$

beschränkt.Für $m\in\mathbb{N}^d$ gilt z.B.:

(5.8) $$0 \leq \int_A T^k \varphi_m \wedge j\cdot h \; d\mu \leq \int \varphi_m \, d\mu \leq \gamma(F) \quad .$$

Nach dem Diagonalverfahren kann daher eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ gewählt werden,sodaß

$$\lim_{\vartheta\to\infty} \int_A T^k \varphi_{(n_\vartheta)} \wedge jh \; d\mu$$

für alle $k\in\mathbb{N}^d$, $j\geq\mathbb{1}$ und $A\in\mathcal{F}_0$ gleichzeitig existiert.
Weil $\mathcal{F}_0$ bezüglich der Metrik

$$\operatorname{dist}(A,B) := \int_{A\triangle B} h \, d\mu$$

dicht in $\mathcal{F}$ liegt,existiert der obige Limes sogar für alle $A\in\mathcal{F}$.
Seien dazu

$$A_1,A_2,A_3,\dots \in \mathcal{F}_0 \text{ mit } \operatorname{dist}(A,A_l) \xrightarrow[(l\to\infty)]{} 0$$

gewählt.
Dann ist $(a_l)_{l=1}^{\infty}$, $a_l := \lim_{\vartheta\to\infty} \int_{A_l} T^k \varphi_{(n_\vartheta)} \wedge jh \, d\mu$,wegen (5.8) durch 0 und $\gamma(F)$ beschränkt. O.B.d.A. existiert deswegen

$$a := \lim_{l\to\infty} a_l \quad .$$

Es folgt:

$$\Big| \int_A T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu - \int_{A_1} T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu \Big|$$

$$\leq \int_{A \triangle A_1} T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu$$

$$\leq \int_{A \triangle A_1} jh \, d\mu$$

$$= j \cdot \mathrm{dist}(A, A_1) \quad .$$

Grenzübergang $\nu \longrightarrow \infty$ liefert:

$$\limsup_{\nu \to \infty} \int_A T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu - a_1 \leq j \cdot \mathrm{dist}(A, A_1) \quad ,$$

$$\liminf_{\nu \to \infty} \int_A T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu - a_1 \geq -j \cdot \mathrm{dist}(A, A_1) \quad .$$

Grenzübergang $l \longrightarrow \infty$ liefert schließlich das Gewünschte:

$$\limsup_{\nu \to \infty} \int_A T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu \leq a \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_A T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu \quad .$$

Nach dem Satz von Vitali-Hahn-Saks gilt daher für alle $k \in \mathbb{N}^d$ und $j \geq 1$:

$$(5.9) \qquad T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \xrightarrow[(\nu \longrightarrow \infty)]{\text{schwach}} \lambda_{k,j} \in L_1 \quad .$$

Offensichtlich gilt für $k \in \mathbb{N}^d$:

$$0 \leq \lambda_{k,1} \leq \lambda_{k,2} \leq \lambda_{k,3} \leq \dots \quad ,$$

und somit punktweise:

$$\lambda_{k,j} \xrightarrow[(j \longrightarrow \infty)]{} \lambda_k \quad .$$

Es wird nun gezeigt, daß $(\lambda_k \mid k \in \mathbb{N}^d)$ die geforderten Eigenschaften besitzt.

zu $\lambda_k \in L_1$: Nach dem Satz von Beppo-Levi gilt:

$$\int \lambda_k \, d\mu = \lim_{j \to \infty} \int \lambda_{k,j} \, d\mu$$

$$\underset{(5.9)}{=\!=} \lim_{j \to \infty} \lim_{\nu \to \infty} \int T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \, d\mu$$

$$\underset{(5.8)}{\leq\!=} \gamma(F) \quad .$$

zu (5.4) : miterledigt.

zu (5.5) : Sei $n \geq 1$ .Dann gilt für $(n_\nu) \geq n$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \right) \geq \left(\sum_{k=0}^{n-1} T^k \varphi_{(n_\nu)} \right) \wedge jh$$

$$\underset{(5.2)}{\geq\!=} \left(F_n - \left(1 - \frac{|(n_\nu) - n|}{|(n_\nu)|} \right) \cdot \left(F_n - \sum_{k=0}^{n-1} T^k F_1 \right) \right) \wedge jh$$

Schwacher Grenzübergang $\nu \longrightarrow \infty$ liefert:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k,j} \geq F_n \wedge jh \quad .$$

Punktweiser Grenzübergang $j \longrightarrow \infty$ liefert dann:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \geq F_n \quad .$$

(4.1) liefert schließlich für die restlichen $n \in \mathbb{N}^d$ das Gewünschte.

zu (5.7) : Sei also $r \in \mathbb{N}^d$ .Dann gilt:

$$T^r \lambda_{k,j} \underset{(5.9)}{=\!=} T^r \left(\text{s-lim}_{\nu \to \infty} T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \right)$$

$$= \text{s-lim}_{\nu \to \infty} T^r \left(T^k \varphi_{(n_\nu)} \wedge jh \right) \quad ,$$

denn wegen $\|T^r\|_1 = 1$ ist T^r sogar in der starken Topologie stetig.

(s-lim bezeichnet den schwachen Limes).

Es folgt:

$$T^r \lambda_{k,j} \leq \text{s-lim}_{\nu \to \infty} \left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge T^r jh \right)$$

$$\leq \text{s-lim}_{\nu \to \infty} \left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge (lh + g) \right) \quad ,$$

wobei $g \in L_1$, $g \geq 0$ und $l \in \mathbb{N}$ so gewählt werden, daß für beliebig vorgegebenes $\varepsilon > 0$, die folgenden zwei Ungleichungen erfüllt sind:

$$T^r jh \leq lh + g \quad \text{und} \quad \|g\|_1 < \varepsilon \quad .$$

Somit:

$$T^r \lambda_{k,j} \leq \text{s-lim}_{\nu \to \infty} \left(\left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge lh \right) + \left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge g \right) \right)$$

$$\leq \text{s-lim}_{\nu \to \infty} \left(\left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge lh \right) + g \right)$$

$$\leq \text{s-lim}_{\nu \to \infty} \left(T^{k+r} \varphi_{(n_\nu)} \wedge lh \right) + g$$

$$\leq \lambda_{k+r,l} + g \quad .$$

Grenzübergang $j \longrightarrow \infty$ und $\varepsilon \longrightarrow 0$ liefert das Gewünschte.

Haben $T_1, \dots, T_d$ markovsche Umkehrabbildungen, so ist

$$T^{-r} = (T_1^{-1})^{r_1} \circ \cdots \circ (T_d^{-1})^{r_d}$$

für alle $r \in \mathbb{N}^d$ markovsch.

Auf dieselbe Weise wie eben,zeigt man dann:

(5.10) Für alle $k,r \in \mathbb{N}^d$ gilt $\lambda_k \geq T^{-r}\lambda_{k+r}$.

Aus (5.7) und (5.10) folgt nun:

$$\lambda_{k+r} = T^r(T^{-r}\lambda_{k+r}) \underset{(5.10)}{\leq} T^r\lambda_k \underset{(5.7)}{\leq} \lambda_{k+r} \quad .$$

Also gilt überall Gleichheit,d.h.:

(5.11) Für alle $k,r \in \mathbb{N}^d$ gilt $\lambda_{k+r} = T^r\lambda_k$.

Es bleibt zu zeigen,daß (5.6) wegen (5.11) „trivialerweise" erfüllt ist.
(Satz 5.5 liefert dann die restliche Behauptung).
Sei also $k \in \mathbb{N}^d$ .Dann gilt:

$$(-1)^d\Delta_0^{\mathbb{1}}\, T^{\cdot}\Lambda_{k-\cdot} = (-1)^d \sum_{v \in \{1,2\}^d} (-1)^{v_1+\cdots+v_d} \cdot T^{0 \overset{\circ}{v} \mathbb{1}} \Lambda_{k-(0 \overset{\circ}{v} \mathbb{1})}$$

$$= \sum_{w \in \{0,1\}^d} (-1)^{w_1+\cdots+w_d} \cdot T^w \Lambda_{k-w}$$

$$= \sum_{k \geq w \in \{0,1\}^d} (-1)^{w_1+\cdots+w_d} \cdot T^w \lambda_{k-w}$$

$$\underset{(5.11)}{=} \lambda_k \cdot \sum_{k \geq w \in \{0,1\}^d} (-1)^{w_1+\cdots+w_d}$$

$$= \begin{cases} \lambda_0 & \text{falls } k=0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Ist nämlich $k_i \geq 1$ für ein $i \in \{1,\ldots,d\}$,so folgt:

$$\sum_{k \geq w \in \{0,1\}^d} (-1)^{w_1+\cdots+w_d}$$

$$= \sum_{\substack{k \geq w \in \{0,1\}^d \\ w_i = 0}} (-1)^{w_1+\cdots+w_d} + \sum_{\substack{k \geq w \in \{0,1\}^d \\ w_i = 1}} (-1)^{w_1+\cdots+w_d} = 0 \quad .$$

Abschließend müssen noch die Annahmen eliminiert werden,daß F nichtnegativ ist und $\mathcal{F}$ durch eine abzählbare Algebra erzeugt wird.
Für einen beliebigen stark superadditiven Prozess F ist

$$F_n' := F_n - \sum_{k=0}^{n-\mathbb{1}} T^k F_{\mathbb{1}} \quad , \quad n \in \mathbb{N}^d \quad ,$$

wegen (4.10) ein nichtnegativer stark superadditiver Prozess.

Ist dann $(\lambda_k' \mid k \in \mathbb{N}^d)$ eine der gewünschten Familien für F' ,so kann sehr leicht nachgeprüft werden,daß

$$\lambda_k := \lambda_k' + T^k F_{\mathbb{1}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}^d \quad ,$$

eine der gesuchten Familien für F ist.
Es wird nun noch gezeigt,daß eine abzählbar erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}_\infty$ existiert, sodaß alle F_n $\mathcal{F}_\infty$-meßbar sind und $T_1,\ldots,T_d$ den Raum $L_1(\mathcal{X}, \mathcal{F}_\infty, \mu)$ auf sich abbilden.(Der obige Beweis kann dann mit $\mathcal{F}_\infty$ anstatt $\mathcal{F}$ durchgeführt werden).
Ist $\mathcal{F}_1$ die kleinste σ-Algebra in der alle F_n , $n \in \mathbb{N}^d$,meßbar sind,so ist $\mathcal{F}_1$ abzählbar erzeugt.
Falls für ein $j \geq 1$ schon eine abzählbar erzeugte σ-Algebra $\mathcal{F}_j$ konstruiert ist,ist der Raum $L_1(\mathcal{X}, \mathcal{F}_j, \mu)$ separabel,d.h. es existieren

$$f_1^{(j)}, f_2^{(j)}, f_3^{(j)}, \ldots \quad ,$$

die darin dicht liegen.
Ist $\mathcal{F}_{j+1}$ die kleinste σ-Algebra in der alle

$$T^k f_\nu^{(j)} \quad , \quad k \in \mathbb{N}^d \quad , \quad \nu \geq 1 \quad ,$$

meßbar sind,so ist auch $\mathcal{F}_{j+1}$ abzählbar erzeugt.
Die σ-Algebra $\mathcal{F}_\infty$,welche durch

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \ldots$$

erzeugt wird,hat dann die gewünschten Eigenschaften. ■

5.8 Bemerkung
Sind $\theta_1,\ldots,\theta_d$ kommutative maßtreue und invertierbare Abbildungen,so sind

$$T_i : L_1 \longrightarrow L_1 \quad , \quad f \longmapsto f \circ \theta_i \quad ,$$

kommutative markovsche Operatoren mit markovschen Umkehrabbildungen.
(Es gilt

$$T_i^{-1} : L_1 \longrightarrow L_1 \quad , \quad f \longmapsto f \circ \vartheta_i \quad ,$$

wobei die $\vartheta_1,\ldots,\vartheta_d$ als Umkehrabbildungen der $\theta_1,\ldots,\theta_d$ ebenfalls wieder kommutativ und maßtreu sind:

$$\mu(A) = \mu(\theta_i^{-1}\theta_i A) = \mu(\theta_i A) = \mu(\vartheta_i^{-1}A) \quad \text{für alle } A \in \mathcal{F} \ ).$$

Somit besitzt jeder,bezüglich dieser Operatoren,stark superadditive Prozess eine exakte Dominante.

Das bedeutet für stochastische Prozesse (gemäß Bemerkungen 4.6 und 4.8), daß der Kingmansche Zerlegungssatz nun auch ohne den Satz von Komlos bewiesen ist.

Zum Abschluß der Arbeit soll noch ein sehr elementarer Beweis für den gerade diskutierten Spezialfall vorgestellt werden. Der Beweis wird dabei nicht in allen Details ausgeführt.

5.9 Satz

Seien $T_1,\dots,T_d$ durch $T_i : L_1 \longrightarrow L_1$, $f \longmapsto f \circ \theta_i$,gegeben. Dabei seien $\theta_1,\dots,\theta_d$ kommutative, maßtreue und invertierbare Transformationen.

Dann besitzt jeder bezüglich $T_1,\dots,T_d$ stark superadditive Prozess F eine exakte Dominante G .

Beweis

O.B.d.A. sei wieder F nichtnegativ und $\mathcal{F}$ durch eine abzählbare Algebra $\mathcal{F}_*$ erzeugt.

Dann ist auch

$$\mathcal{F}_0 := \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} \theta^{-k}\mathcal{F}_*$$

eine abzählbare Algebra.

Für jede Wahl von $k \in \mathbb{Z}^d$ und $A \in \mathcal{F}_0$ ist die Folge

$$\left(\int_{\theta^{-k}A} \varphi_{(\nu)}\, d\mu \;\middle|\; \nu=1,2,3,\dots \right)$$

beschränkt. Nach dem Diagonalverfahren kann daher eine Teilfolge $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ gewählt werden, sodaß

$$\psi_k(A) := \lim_{\nu\to\infty} \int_{\theta^{-k}A} \varphi_{(n_\nu)}\, d\mu$$

für alle $k \in \mathbb{Z}^d$ und $A \in \mathcal{F}_0$ gleichzeitig existiert.

Ein Satz von K.Yosida und E.Hewitt [1952] besagt nun, daß zu jeder Charge ψ , d.h. zu jeder endlichen, additiven und nichtnegativen Mengenfunktion auf $\mathcal{F}_0$, ein eindeutig bestimmtes Maß $m(\psi)$ auf $\mathcal{F}$ existiert, mit:

(5.12) $\quad m(\psi) \le \psi$ auf $\mathcal{F}_0$,

(5.13) $\quad m(\psi)$ ist auf $\mathcal{F}_0$ maximal unter allen Maßen mit dieser Eigenschaft:

$$\eta \text{ Maß},\ \eta \le \psi \text{ auf } \mathcal{F}_0 \Longrightarrow \eta \le m(\psi) \text{ auf } \mathcal{F}_0 \quad .$$

$m(\psi)$ ist dabei für $A \in \mathcal{F}_0$ durch

(5.14) $$m(\psi)(A) := \inf\left\{ \sum_{l=1}^{\infty} \psi(A_l) \;\middle|\; (A_l)_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}_0 \text{ ,disjunkt, } \bigcup_{l=1}^{\infty} A_l = A \right\}$$

gegeben.

Der Beweis dieses Satzes ist einfach: (5.14) impliziert, daß $m(\psi)$ auf $\mathcal{F}_0$ σ-additiv ist (vgl. L.Sucheston [1964]), sowie (5.13) und (5.12) erfüllt, insbesondere also auch endlich ist.

Nach dem Satz von Caratheodory kann $m(\psi)$ dann in eindeutiger Weise auf ganz $\mathcal{F}$ fortgesetzt werden.

Ebenso einfach folgt aus (5.14) ,daß für zwei Chargen ψ , ψ'

(5.15) $\quad m(\psi+\psi') \le m(\psi) + m(\psi')$ auf $\mathcal{F}_0$

gilt. (Wegen der Maximalität von $m(\psi+\psi')$ gilt dann sogar Gleichheit).

Speziell für die obigen ψ_k , $k \in \mathbb{Z}^d$,folgt aus der Invarianz von $\mathcal{F}_0$ ($\theta^{-k}\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_0$) und (5.14) :

(5.16) $\quad \lambda_k = \lambda_0 \circ \theta^{-k}$ auf $\mathcal{F}_0$, $\lambda_k := m(\psi_k)$.

Aus (5.2) folgt für alle $n \in \mathbb{N}^d$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k \ge F_n \cdot \mu \quad \text{auf } \mathcal{F}_0 \quad .$$

Somit:

$$F_n \cdot \mu \underset{(5.13)}{\le} m\Big(\sum_{k=0}^{n-1} \psi_k\Big) \underset{(5.15)}{\le} \sum_{k=0}^{n-1} m(\psi_k) \underset{(5.16)}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0 \circ \theta^{-k} \quad \text{auf } \mathcal{F}_0 \text{ ,also auf ganz } \mathcal{F} \quad .$$

Also:

$$\lambda_0(X) = \lim_{n\to\infty} |n|^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_0 \circ \theta^{-k}(X) \ge \lim_{n\to\infty} |n|^{-1} \int F_n\, d\mu = \gamma(F) \quad .$$

Wegen $\lambda_0(X) \le \psi_0(X) \le \gamma(F)$ gilt daher sogar $\lambda_0(X) = \gamma(F)$.

$G_0 := \dfrac{d\lambda_0}{d\mu}$ ist eine exakte Dominante von F . ■

Literatur

Akcoglu,M.A. , Krengel,U. [1981] .
Ergodic theorems for superadditive processes.
J. Reine Angew. Math. 323,53-67 .

Akcoglu,M.A. , Sucheston,L. [1978] .
A ratio ergodic theorem for superadditive processes.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 44,269-278 .

Burkholder,D. [1973] .
Discussion of Kingman,J.F.C. [1973] .
Ann. Probability 1,900-902 .

Emilion,R. , Hachem,B. [1983] .
Un theoreme ergodique fortement sur-aditif a plusieurs parametres.
C.R. Acad. Sc. Paris,t.296 .

Hammersley,J.M. , Welsh,D.J.A. [1965] .
First-passage percolation,subadditive processes,stochastic networks and
generalized reneval theory.
Bernoulli-Bayes-Laplace Anniversary Volume,61-100.
Springer-Verlag,Berlin.

Hammersley,J.M. [1974] .
Postulates for subadditive processes.
Ann. Probability 2,652-680.

Kingman,J.F.C. [1973] .
Subadditive ergodic theory (with discussion).
Ann. Probability 1,883-909.

Kingman,J.F.C. [1975] .
Subadditive processes.
Ecole d'ete des probabilites de Saint-Flour.
Lecture Notes in Mathematics 539,168-223.
Heidelberg-Berlin-New York,Springer-Verlag.

Komlos,J. [1967] .
A generalization of a problem of Steinhaus.
Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae.
Tomus 18 (1-2),217-229.

Krengel,U. [1985] .
Ergodic theorems
Walter de Gruyter,Berlin-New York.

Nguyen,X.X. [1979] .
Ergodic theorems for subadditive spatial processes.
Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete 48,159-176.

Richter,H. [1956] .
Wahrscheinlichkeitstheorie
Berlin-Göttingen-Heidelberg,Springer.

Sucheston,L. [1964] .
On existence of finite invariant measures.
Math. Zeitschrift 86,327-336.

Smythe,R.T. [1976] .
Multiparameter subadditive processes.
Ann. Probability,Vol 4,No.5,772-782.

Yosida,K. , Hewitt,E. [1952] .
Finitely additive measures.
Trans. Amer. Math. Soc. 72,46-66.